Esercizi proposti per il corso di matematica per biotecnologie 2004/05.

1. Calcolare $\sum_{i=2}^{10} a_i$, ove $a_n = 2n+1$ se n dispari, $a_n = 4$ se n pari.

2. Usare l'uguaglianza $(i+1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$ per trovare una formula per $\sum_{i=1}^{n} i^3$.

3. Dire se la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{13}{2^n} - \frac{5}{3^n}\right)$ è convergente e nel caso trovarne la somma.

4. Dire se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente quando $a_n = \frac{6^n}{3^n}$; $a_n = \frac{6^n}{3^n+4^n}$; $a_n = \frac{n^4}{3^n}$; $a_n = \frac{2^n}{n^{38}}$; $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2}$; $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sin(n^5)}$; $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$; $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}, a > 0$; $a_n = \frac{n^7+n^5+3}{n^6+n^8+\cos(n)}$; $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$; $a_n = \frac{1}{n^{n^n}}$; $a_n = n\sin(\frac{1}{n^2})$; $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2}$; $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!-n!}$; $a_n = \left(\frac{2a+1}{3-a}\right)^n$, $a \in \mathbf{R}$; $a_n = \frac{n^2}{n^4-(\ln n)^{10}}$; $a_n = \frac{2^n+n^{15}}{3^n+n^2}$; $a_n = \frac{3}{2^n} - 5\frac{3^n}{4^n}$; $a_n = \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2+1}$; $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{3}{n^3} & \text{se } n \text{ dispari}. \end{cases}$

5. Calcolare i seguenti limiti di successioni: $\lim_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{n}$; $\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$; $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ $\alpha > 0$; $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{9n^2+2}{n+n^2}}$, $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

6. Calcolare i seguenti limiti di funzioni: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^7-3}{3x^7+8x^2+\sin x}$, $\lim_{x\to-1} \frac{3x+1}{2x+3} + e^x$, $\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2-1)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+x}{a^x+x^3+\sin x}$, $(a \in \mathbf{R})$, $\lim_{x\to0} \frac{x}{\ln(|x|)}$, $\lim_{x\to0} \frac{\cos x}{\ln(|x|)}$, $\lim_{x\to+2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$, $\lim_{x\to2} \frac{\sin x}{x}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{(\ln x)^8}$, $\lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{x}{100}}}{(\ln x)^8}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{(\ln x^8)}$, $\lim_{x\to-\infty} e^x(\ln x^8)$, $\lim_{x\to-\infty} e^x x\sin x$, $\lim_{x\to0^-} \frac{|x|^\alpha}{\sin x}$, $\lim_{x\to3} \frac{\ln(x^2-4x+4)}{x^2-4x+3}$, $\lim_{x\to0} \sin\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$, $\lim_{x\to0} \sin\left(\frac{e^{5x}-1}{x}\right)$, $\lim_{x\to0} \sin\left(\frac{e^x-1}{\sqrt[3]{4x}}\right)$, $\lim_{x\to0} \frac{x}{x^3-\sin x}$, $\lim_{x\to0} \frac{x^2}{x^2-\sin(x^3)}$, $\lim_{x\to0} \frac{x^2}{x^2-(\sin x)^3}$, $\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x^2}{x^2-(\sin x)^3}\right)$

7. Spiegare perché le seguenti funzioni f sono continue: $f(x) = x^2+\sin x$, $f(x) = x^4+e^{-\pi x}$, $f(x) = \frac{3^x}{x^2+\text{arctg}x-\frac{\pi}{2}}$, $f(x) = \sin\left(|x^7-x^2+2|e^{-5x}\right)$.

8. Calcolare $e^{\ln 8}$, $8^{\log_2 4}$.

9. Una popolazione di batteri aumenta con tasso costante e raddoppia ogni quarto d'ora. Dopo quanto tempo sarà aumentata di 8 volte? e di 100 volte?