Esercizi proposti per il corso di matematica per biotecnologie 2003/04, 3^o foglio.

1. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt{x}}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+5)-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$

2. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni f definite come $f(x) = \sin(7x-5)$, $f(x) = xe^{2x}\cos(x^3-x)$, $\frac{e^{\mathrm{arctg}\, x}}{x^2+3x}$, $f(x) = \int_2^x \frac{\sin t}{t^2+2}$.

3. Studiare gli intervalli di crescenza e decrescenza delle funzioni f date qui sotto nel loro insieme di definizione, e determinarne i punti di estremo relativo, dicendo se sono di massimo o di minimo relativo: $f(x) = x^5-2x+4$, $f(x) = x-2\mathrm{arctg}x$, $f(x) = \ln(3+x)-x^2$, $e^x(x^2+x)$, $\frac{x}{x^2-2}$. Fare un grafico approssimato delle funzioni stesse. Dire infine quali di tali funzioni hanno massimo assoluto e quali di tali funzioni hanno minimo assoluto nel loro insieme di definizione.

4*. Dire per quali valori di $a \in \mathbf{R}$ la funzione f definita da $f(x) = \sin x + ax$ è strettamente crescente su $\mathbf{R}$.

5. Calcolare i seguenti integrali indefiniti: $\int x^2 + 5x^3\,dx$, $\int \sqrt{x}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{4x^2+1}\,dx$, $\int e^{7x+3}\,dx$, $\int (\ln x)^2 \frac{1}{x}\,dx$, $\int xe^{x^2}\,dx$, $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+a}\,dx$ $(a>0)$, $\int \frac{x^3}{x+1}\,dx$, $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$, $\int \frac{1}{x^2+4x+10}\,dx$, $\int \sin(e^x)e^{2x}\,dx$, $\int x^2e^{2x}\,dx$, $\int \ln(x^2+1)\,dx$, $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x+3}\,dx$, $\int x^2 \ln(7+x^3)\,dx$. Calcolare inoltre l'integrale definito tra 1 e 3 di alcune delle funzioni sopra.

6. Sia $f : I \to \mathbf{R}$ continua, I intervallo. Allora sotto quali delle seguenti ipotesi posso dire che f ha sicuramente minimo e massimo e sotto quali ipotesi posso dire che f è limitata? a) $I = [3,6]$, b) $I = [3,6)$, c) $I = [3,+\infty)$.

7. Supponiamo che f sia una funzione continua da $(0,5)$ in $\mathbf{R}$. Sotto quali di queste ipotesi si può concludere che esiste un $x \in (0,5)$ tale che $f(x) = 2$?

a) $f(1) = 5,\ f(2) = 7$,

b) $f(1) = 3,\ f(2) = 1$,

c) $f(1) = 3,\ f(x) \underset{x\to5^-}{\longrightarrow} 2$,

c) $f(1) = 3,\ f(x) \underset{x\to5^-}{\longrightarrow} 0$.

8. Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione continua e inoltre $f(n) = (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbf{Z}$, si può dire che f si annulla in almeno 3 punti distinti? Si può dire che f si annulla in almeno 20 punti distinti? Si può dire che f si annulla in almeno 718 punti distinti?

9*. Provare che $\mathrm{arctg}\,(x+2) \leq 1 + \mathrm{arctg}\,(x)$ per ogni $x \geq 1$.