Esercizi proposti per il corso di matematica per biotecnologie 2003/04, 2^o foglio.

1. Calcolare $\sum_{i=4}^{6} \frac{i(i+1)}{i+2}$.

2*. Usare l'uguaglianza $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$ per trovare una formula per $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

3. Dire se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente e nel caso calcolarne la somma, quando

$a_n = \begin{cases} \frac{n^2}{n+1} & \text{se } n \leq 5 \\ 0 & \text{se } n > 5\,, \end{cases}$ $\qquad a_n = \begin{cases} n^3 & \text{se } n \leq 3 \\ \frac{1}{4^n} & \text{se } n > 3\,. \end{cases}$

4. Dire se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente quando $a^n = \frac{2^n}{3^n}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$, $a_n = \frac{1}{n^n}$, $a_n = \frac{n^5}{2-n^5}$, $a_n = \frac{1}{(n!)^n}$, $a_n = \frac{3^n+1}{(\frac{10}{3})^n + \sin n}$, $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$, $a_n = (-1)^n n!$, $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$, $a_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, $a_n = \sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i^2}$ (l'ultima serie è piú difficile).

5. Calcolare i seguenti limiti di successioni: $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}$, $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n^2-1}{n}}$, $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n-n^2}{n+\sin n}}$, $\lim_{n\to+\infty} \cos(\frac{\pi n}{n+1})$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n}{n+2}\right)^{\sqrt{2}}$, $\lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

6. Determinare il dominio delle funzioni f ove f è definita da: $f(x) = \frac{3^x}{x^2-7}$, $f(x) = \frac{1}{\sin(\sqrt{x})}$, $\sqrt{10 - \ln(2+x)}$, $\frac{\sqrt{10-\ln(2+x)}}{\ln(x^2-5x+6)}$.

7. Calcolare i seguenti limiti di funzioni: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-3}{3x^4+5}$, $\lim_{x\to+2} \frac{x^4-3}{3x^4+5}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^9-3}{3x^4+5}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^3+x^2+\sin x}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$, $\lim_{x\to0^+} \frac{x}{\ln x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x}$, $\lim_{x\to0^-} \frac{x}{\ln x}$, $\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^2$, $\lim_{x\to0} x\cos(\frac{1}{x})$, $\lim_{x\to e} \frac{\ln x}{x^2+5}$, $\lim_{x\to0} \frac{x^2(1-\cos x)}{\sin(x^4)}$, $\lim_{x\to0} \frac{\sin\left(\sqrt{x+3}\right)}{\sqrt{x+3}}$, $\lim_{x\to2} \frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}$, $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{2x+x^2}$ $\lim_{x\to0} \frac{\sin x - x^5}{x^2+x^3}$.

8. Calcolare $\lim_{x\to0} f(x)$ quando $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x > 0 \\ x^3 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se nello sviluppo decimale di } x \text{ compare infinite volte } 4 \\ x^3 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

9. Dire per quali numeri reali x vale la disuguaglianza $\ln(x^2+1) > 2\ln x$.

10. Dire quali delle seguenti disugualianze valgono per tutti i numeri reali x: $e^{x+3} > e^x$, $(x+3)^8 > x^8$, $(x+3)^9 > x^9$, $\sin(x+3) > \sin x$.

11. Calcolare arctg0, arctg1, $\log_2 32$, $\log_{1/2} 32$, $\log_3 \frac{\sqrt[5]{3}}{27}$, $\left[\log_{10} 343\right]$, $\left[\log_{10} 0{,}0002811\right]$. Ricordo che con $[a]$ si indica la parte intera di a.

12. Calcolare la derivata di f definite da $fx) = x^5 - 6x^3 + 3x + 8$, $f(x) = \sin(e^x)\text{arctg}x$, $f(x) = x\sin x\cos x$, $f(x) = \cos\left(\sin(x^7)\right)$, $f(x) = \frac{3^x}{4\sin x+2}$, $f(x) = \frac{\sin\left(x\text{arctg}(x^2+7x)\right)}{x^3-\ln(3x+5)}$.