2. INTEGRALE DI LEBESGUE

Consideriamo fissato nel seguito uno spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e non imponiamo a priori alcuna restrizione su di esso (tipo misura finita o σ-finita). Denotiamo con $\mathcal{S}_+(X)$ lo spazio delle funzioni semplici non negative a valori reali. *In questa notazione differisco leggermente da CD, in quanto lí si permetteva che le funzioni potessero anche assumere il valore* $+\infty$. Si vede quindi che le funzioni in $\mathcal{S}_+(X)$ sono quelle della forma

$$s = \sum_{i=1}^{k} t_i \chi_{A_i} \tag{2.1}$$

ove $t_i \in [0, +\infty[$, e A_i sono insiemi misurabili (ossia appartenenti a $\mathcal{A}$) a due a due disgiunti. Si può inoltre richiedere che

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = X. \tag{2.2}$$

Comunque tale richiesta non è fondamentale dato che, se (2.2) non vale, allora posso chiamare A_{k+1} il complementare di $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i \neq X$ che ovviamente appartiene a $\mathcal{A}$, e porre $t_{k+1} = 0$ e si ha $s = \sum\limits_{i=1}^{k+1} t_i \chi_{A_i}$ e questa volta si ha $\bigcup\limits_{i=1}^{k+1} A_i = X$. Quindi ho scritto, aggiungendo l'insieme A_{k+1}, s nella forma (2.1) soddisfacendo anche (2.2). Notiamo anche che invece che richiedere che $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i \neq X$ possiamo richiedere che $t_i > 0$ per ogni $i = 1, ..., k$, poiché nella sommatoria in (2.1) possiamo togliere i termini con $t_i = 0$ ottenendo lo stesso risultato. Useremo tale fatto nel seguito. Ricordo che se $s \in \mathcal{S}_+(X)$, s scritta nella forma (2.1), si definisce

$$\int_X s \, d\mu := \sum_{i=1}^{k} t_i \mu(A_i) \,, \tag{2.3}$$

con la convenzione $0 \times \infty = 0$, cosa che potrebbe capitare se $t_i = 0$ e $\mu(A_i) = \infty$. Ricordo che si prova che la definizione (2.3) non dipende dalla particolare scrittura di s nella forma (2.1). Noi, a differenza del libro CD, abbiamo definito l'integrale di una funzione $f : X \to [0, +\infty]$ misurabile come

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : s \in \mathcal{S}_+(X), s \leq f \right\}.$$

Osservazione. Segue subito dalla definizione che, se f e g sono misurabili e $0 \leq f \leq g$, allora $\int\limits_X f \, d\mu \leq \int\limits_X g \, d\mu$. ∎

Teorema (di Beppo Levi). *Siano $f_n : X \to [0,\infty]$, $= 1,2,3...$ misurabili, e supponiamo che la successione f_n sia crescente, ossia $f_n \le f_{n+1}$ per ogni $n = 1,2,3,....$ Posto $f(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, si ha*

$$\int\limits_X f_n\,d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int\limits_X f\,d\mu\,.$$

Dim. Notiamo innanzitutto che f, essendo limite puntuale di funzioni misurabili è misurabile, e quindi ha senso considerare il suo integrale. Per l'osservazione precedente si ha $\int\limits_X f_n\,d\mu \le \int\limits_X f_{n+1}\,d\mu$ per ogni $n = 1,2,3,...$, e di conseguenza

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu\,. \tag{2.4}$$

Inoltre, sempre per Osservazione, dato che da $f_n \le f_{n+1}$ segue chiaramente $f_n \le f$ per ogni $n = 1,2,3,...$, si ha $\int\limits_X f_n\,d\mu \le \int\limits_X f\,d\mu$ per ogni $n = 1,2,3,...$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \le \int\limits_X f\,d\mu\,. \tag{2.5}$$

Per finire la dimostrazione basta quindi provare la disuguaglianza opposta e quindi basterà provare

$$\forall\, M \in \left]0, \int\limits_X f\,d\mu\right[\ \ \exists\, \bar{n} = 1,2,3... : \int\limits_X f_{\bar{n}}\,d\mu > M\,. \tag{2.6}$$

Infatti notiamo che se fosse $\int\limits_X f\,d\mu = 0$ allora, dato che $0 \le \int\limits_X f_n\,d\mu \le \int\limits_X f\,d\mu$, si avrebbe $\int\limits_X f_n\,d\mu = 0$ per ogni $n = 1,2,3,...$ e quindi il teorema sarebbe banalmente vero. Quindi possiamo assumere $\int\limits_X f\,d\mu > 0$. Allora, da (2.6) segue subito che, comunque preso M con $0 < M < \int\limits_X f\,d\mu$ si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n\,d\mu \ge \int\limits_X f_{\bar{n}} > M$, e quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n\,d\mu \ge \int\limits_X f\,d\mu$, che, unita a (2.5) prova il teorema. Sia dunque M come in (2.6). Allora per definizione di $\int\limits_X f\,d\mu$, esiste $g \in \mathcal{S}_+(X)$ tale che $g \le f$ e

$$\int\limits_X g\,d\mu > M\,. \tag{2.7}$$

dato che $g \in \mathcal{S}(X)$ possiamo scrivere g come

$$g = \sum_{i=1}^{k} t_i \chi_{A_i}, \quad t_i > 0\ \forall\, i = 1,...,k. \tag{2.8}$$

con gli insiemi A_i misurabili e a due a due disgiunti. Da (2.7) abbiamo

$$\sum_{i=1}^{k} t_i \mu(A_i) = \int_X g \, d\mu > M \,. \tag{2.9}$$

Distinguiamo ora due casi.

Primo caso: $\mu(A_i) < +\infty$ per ogni $i = 1, ..., k$. Poniamo $h_n = f_n \wedge g$ (ricordo che $a \wedge b$ indica il minimo tra a e b), e $A := \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Si vede facilmente, tenuto conto che f_n è una succesione crescente di funzioni e che $g \leq f$, che $0 \leq h_n \leq h_{n+1}$ per ogni $n = 1, 2, 3, ...$ e che $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$. Dato che h_n tende a g puntualmente su A che ha misura finita in quanto unione dei k insiemi A_i di misura finita, per un noto teorema, si ha anche $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ quasi uniformemente su A (Teorema 2.27 in CD). Quindi fissato $\varepsilon > 0$ (e supponiamo $\varepsilon < \min\{t_i : i = 1, 2, ..., k\}$), esiste un sottoinsieme misurabile E di A tale che

$$\mu(E) < \varepsilon, \quad \exists\, \bar{n} : h_{\bar{n}} \geq g - \varepsilon \text{ su } A \setminus E \,.$$

Perciò $h_{\bar{n}} \geq t_i - \varepsilon$ su $A_i \setminus E$ e $h_{\bar{n}} \geq 0$ altrove, e di conseguenza $f_{\bar{n}} \geq h_{\bar{n}} \geq \sum_{i=1}^{k} (t_i - \varepsilon) \chi_{A_i \setminus E}$, quindi

$$\int_X f_{\bar{n}} \, d\mu \geq \sum_{i=1}^{k} (t_i - \varepsilon) \mu(A_i \setminus E) \geq \sum_{i=1}^{k} (t_i - \varepsilon) \Big(\mu(A_i) - \mu(E) \Big) \geq \sum_{i=1}^{k} (t_i - \varepsilon) \Big(\mu(A_i) - \varepsilon \Big)$$

ove abbiamo usato il ben noto generale fatto che se $A, B \in \mathcal{A}$ e $\mu(B) < +\infty$, allora $\mu(A \setminus B) \geq \mu(A) - \mu(B)$. Ora usando (2.9) si vede che prendendo ε opportuno, sufficientemente piccolo, si ha $\sum_{i=1}^{k} (t_i - \varepsilon) \Big(\mu(A_i) - \varepsilon \Big) > M$ e quindi $\int_X f_{\bar{n}} > M$ e quindi (2.6) è provata in questo primo caso.

Secondo caso: Esiste $\bar{i} = 1, ..., k$ tale che $\mu(A_{\bar{i}}) = +\infty$. In tal caso per (2.9) si ha $\int_X f \, d\mu \geq \int_X g \, d\mu = +\infty$ $\big($ricordo che abbiamo supposto $t_i > 0$ per ogni i e quindi $t_{\bar{i}} \mu(A_{\bar{i}}) = +\infty$, non essendo un caso della forma $0 \times \infty\big)$. Poiché la successione f_n tende crescendo ad $f \geq g$ e $g = t_{\bar{i}}$ su $A_{\bar{i}}$, per ogni $x \in A_{\bar{i}}$ esisterà $\bar{n}$ tale che $f_n(x) \geq \frac{1}{2} t_{\bar{i}}$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Perciò, posto $B_n := \big\{ x \in A_{\bar{i}} : f_n(x) \geq \frac{1}{2} t_{\bar{i}} \big\}$, la successione B_n è crescente in n e si ha $A_{\bar{i}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Quindi per l'ipotesi del secondo caso $\mu(B_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu(A_{\bar{i}}) = +\infty$. Inoltre $f_n \geq \frac{1}{2} t_{\bar{i}} \chi_{B_n}$, e quindi

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_X \left(\frac{1}{2} t_{\bar{i}} \chi_{B_n} \right) d\mu = \frac{1}{2} t_{\bar{i}} \mu(B_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \,.$$

A questo punto (2.6) segue immediatamente e la dimostrazione è completa. ■