Lemma 1. *Sia g una funzione continua sull'intervallo $[a,b]$ a valori in $\mathbb{R}$. Sia E l'insieme*

$$E := \big\{x \in]a,b[: \exists \xi \in]x,b] | g(\xi) > g(x)\big\}.$$

Allora E è un insieme aperto e quindi si può scrivere come unione finita o numerabile (eventualmente vuota) di intervalli aperti disgiunti, in formula,

$$E = \bigcup_{k\in I}]a_k, b_k[, \ I \text{finito o numerabile}, \ ]a_k, b_k[\cap]a_{k'}, b_{k'}[= \emptyset \text{ se}, k, k' \in I, k \neq k' \tag{1}$$

$$\text{e vale} \quad g(a_k) \leq g(b_k) \quad \forall\, k \in I. \tag{2}$$

Dim. È immediato vedere che E è aperto (in $\mathbb{R}$), e quindi E si scrive come in (1), e questo perché è ben noto che ogni sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$ ha tale proprietà. Rimane da provare (2). Fissiamo $k \in I$. Proveremo che fissato $x \in]a_k, b_k[$ si ha

$$g(x) \leq g(b_k), \tag{3}$$

che, per la continuità di g implica (2). Per provare (3), supponiamo per assurdo (3) falsa e poniamo $x_1 = \max\{t \in [x, b_k] : g(t) \geq g(x)\}$, e proviamo che $x_1 = b_k$, da cui chiaramente segue (3). Notiamo che $g(x_1) \geq g(x)$ per definizione, ma anche $g(x) > g(b_k)$ dato che abbiamo supposto che (3) sia falsa. Quindi

$$g(x_1) > g(b_k) \tag{4}$$

e, se si avesse $x_1 < b_k$, allora $x_1 \in]a_k, b_k[\subseteq E$, e quindi esisterebbe $\xi_1 \in]x_1, b]$ tale che $g(\xi_1) > g(x_1)$, e dato che $g(\xi_1) > g(x_1) \geq g(x)$, ξ_1 non può appartenere a $[x, b_k]$ per la definizione di x_1, quindi $\xi_1 > b_k$, e poiché per (4) $g(\xi_1) > g(x_1) > g(b_k)$ si avrebbe $b_k \in E$, ma d'altra parte $b_k \notin E$ dato che b_k non appartiene all'unione in (1). Quindi aver supposto $x_1 < b_k$ porta a una contraddizione e $x_1 = b_k$, e questo, come detto sopra, prova (3) e quindi (2). ∎

Diamo ora alcune definizioni: dati $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$, poniamo

$$f'_{+,s}(x_0) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

$$f'_{+,i}(x_0) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

$$f'_{-,s}(x_0) = \limsup_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

$$f'_{-,i}(x_0) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Osservazione 2. Notiamo che f è derivabile in x_0 se e solo se tali quattro valori coincidono e sono finiti. Se f inoltre è crescente, allora tutti questi valori sono non negativi.

Osservazione 3. Per la dimostrazione del teorema è utile notare che, se f è crescente da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$, e $]a_k,b_k[$, $k\in I$ sono intervalli disgiunti contenuti in $]a,b[$, con I insieme finito o numerabile, allora $\sum_{k\in I}\big(f(b_k)-f(a_k)\big) \le f(b)-f(a)$. Infatti dalla crescenza segue che gli intervalli $]f(a_k),f(b_k)[$ sono disgiunti. Infatti presi due indici diversi k_1 e k_2, si ha $a_{k_1}\ge b_{k_2}$ oppure $a_{k_2}\ge b_{k_1}$, altrimenti gli intervalli $]a_{k_1},b_{k_1}[$ e $]a_{k_2},b_{k_2}[$ avrebbero punti in comune. Se per esempio $a_{k_1}\ge b_{k_2}$, allora $f(a_{k_1})\ge f(b_{k_2})$ dato che f è crescente, e quindi gli intervalli $]f(a_{k_1}),f(b_{k_1})[$ e $]f(a_{k_2}),f(b_{k_2})[$ sono disgiunti. Inoltre gli intervalli $]f(a_k),f(b_k)[$ sono contenuti in $]f(a),f(b)[$, sempre per la crescenza di f, quindi

$$f(b)-f(a)=m_1\big(]f(a),f(b)[\big)\ge m_1\Big(\bigcup_{k\in I}]f(a_k),f(b_k)[\Big)=\sum_{k\in I}\big(f(b_k)-f(a_k)\big).$$

Teorema 4. *Se f è una funzione crescente da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$, allora f è derivabile quasi ovunque in $]a,b[$.*

Dim. Supponiamo per ora f *continua*. Alla fine accennerò come si modifica la dimostrazione se f non è continua. Proveremo che quasi ovunque (in x) valgono le seguenti

$$f'_{+,s}(x)<+\infty, \tag{5}$$

$$f'_{+,s}(x)\le f'_{-,i}(x). \tag{6}$$

Infatti da (5) e (6), tenendo conto di Osservazione 2, segue che quasi ovunque

$$-\infty<0\le f'_{+,s}(x)\le f'_{-,i}(x)\le f'_{-,s}(x)\le f'_{+,i}(x)\le f'_{+,s}(x)<+\infty. \tag{7}$$

Infatti le prime due disuguaglianze sono ovvie, la terza segue direttamente da (6), la quarta e la sesta sono ovvie, la settima segue da (5). La quinta è un po' meno ovvia, ma si spiega cosí. Avendo supposto provato (6), poniamo $r(x)=-f(-x)$; allora è facile vedere che r è una funzione crescente da $[-b,-a]$ in $\mathbb{R}$. Inoltre, per (5) applicato ad r si ha $r'_{+,s}(x)\le r'_{-,i}(x)$ per quasi ogni $x\in]-b,-a[$. D'altra parte si vede facilmente che $f'_{-,s}(x)=r'_{+,s}(-x)$, $f'_{+,i}(x)=r'_{-,i}(-x)$, da cui segue la quinta disuguaglianza. Cominciamo col provare (5). Basta provare che, posto $E_\infty=\big\{x\in]a,b[:\, f'_{+,s}(x)=+\infty\big\}$, allora E_∞ è contenuto in un insieme di misura nulla. Fissiamo $C>0$ e poniamo

$$E_{(C)}=\Big\{x\in]a,b[:\,\exists\,\xi\in]x,b]\,|\,\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}>C\Big\}.$$

Chiaramente $E_\infty\subseteq E_{(C)}$. Ora, posto $g(x)=f(x)-Cx$, si ha $E_{(C)}=E$, ove E è l'insieme definito in Lemma 1, rispetto a questa funzione g. Perciò vale (1), ossia

$$E_{(C)} = E := \bigcup_{k\in I}]a_k, b_k[$$

ove gli intervalli $]a_k, b_k[$ sono disgiunti, e I è un insieme finito o numerabile di indici; inoltre si ha $g(a_k) \leq g(b_k)$, ossia $f(b_k) - Cb_k \geq f(a_k) - Ca_k$, o anche

$$f(b_k) - f(a_k) \geq C(b_k - a_k),$$

Quindi, per Osservazione 3,

$$f(b) - f(a) \geq \sum_{k\in I} \big(f(b_k) - f(a_k)\big) \geq C \sum_{k\in I} (b_k - a_k)$$

e di conseguenza

$$m_1(E_{(C)}) = \sum_{k\in I} m_1(]a_k, b_k[) = \sum_{k\in I} (b_k - a_k) \leq \frac{f(b) - f(a)}{C}.$$

In particolare, $m_1(E_{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, e dato che $E_\infty \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} E_{(n)}$, (5) è provata. Ora vediamo la dimostrazione di (6), che segue le stesse idee generali di quella di (5), ma è molto piú sottile. Fissiamo t, T con $T > t > 0$ e poniamo

$$E_{t,T} := \big\{x \in]a, b[: f'_{+,s}(x) > T > t > f'_{-,i}(x)\big\}.$$

Dato che l'insieme degli x per cui (6) non vale è contenuto in $\bigcup\limits_{t,T\in\mathbb{Q}, 0<t<T} E_{t,T}$, basterà provare

$$\exists\, F_{t,T} \supseteq E_{t,T} : m_1(F_{t,T}) = 0. \tag{8}$$

Infatti, in tal caso $E_{t,T}$ è un insieme di misura di Lebesgue nulla, e siccome l'insieme $\{(t,T) \in \mathbb{Q}^2 : 0 < t < T\}$ è chiaramente numerabile, allora anche $\bigcup\limits_{t,T\in\mathbb{Q}, 0<t<T} E_{t,T}$ è un insieme di misura di Lebesgue nulla. Sia $x \in E_{t,T}$; allora dato che $f'_{-,i}(x) < t$ esiste $\xi \in [a, x[$ tale che $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} < t$. Ora usiamo una funzione g simile a quella usata per provare (5), ma in questo caso dato che ξ è minore di x, per potere usare Lemma 1, dobbiamo ribaltare l'intervallo. Precisamente definiamo $g : [-b, -a] \to \mathbb{R}$ come

$$g(x) = f(-x) + tx.$$

Quindi, se $x \in E_{t,T}$, esiste $\xi \in [a, x[$ tale che $f(x) - f(\xi) < t(x - \xi)$, o in altri termini $g(-x) < g(-\xi)$. Perciò, dato un punto $-x \in -E_{t,T}$ esiste $-\xi \in]-x, -a]$ tale che $g(-\xi) > g(-x)$, ossia $-E_{t,T}$ è contenuto nell'insieme degli $y \in]-b, -a[$ tali che esiste $\eta \in]y, -a]$ tale che $g(\eta) > g(y)$. Applicando il Lemma 1 a tale insieme si ha

$$-E_{t,T} \subseteq \bigcup_{k\in I} \left(]-b_k, -a_k[\right) \Big(\Rightarrow E_{t,T} \subseteq \bigcup_{k\in I} \left(]a_k, b_k[\right)\Big); \quad g(-b_k) \leq g(-a_k), \tag{9}$$

ove l'unione è disgiunta e I è un insieme finito o numerabile di indici. Ovviamente gli intervalli $]a_k, b_k[$ sono disgiunti e contenuti in $]a, b[$, e dalla definizione di g segue $f(b_k) - f(a_k) \leq t(b_k - a_k)$, per cui

$$\sum_{k\in I} \big(f(b_k) - f(a_k)\big) \leq t \sum_{k\in I} (b_k - a_k). \tag{10}$$

Ora ragioniamo dentro un singolo intervallo $]a_k, b_k[$. Allora se $x \in E_{t,T} \cap]a_k, b_k[$, dato che $f'_{+,s}(x) > T$ esiste $\xi \in]x, b_k]$ tale che $\dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > T$. Quindi ponendo $g(x) = f(x) - Tx$, e applicando il Lemma 1 all'intervallo $[a_k, b_k]$, si ha

$$E_{t,T} \cap]a_k, b_k[\subseteq \bigcup_{l\in I_k} \left(]a_{k,l}, b_{k,l}[\right); \quad g(a_{k,l}) \leq g(b_{k,l}), \tag{11}$$

ove gli intervalli $]a_{k,l}, b_{k,l}[$ sono disgiunti e ovviamente contenuti in $]a_k, b_k[$. Dalla definizione di g segue $f(a_{k,l}) - Ta_{k,l} \leq f(b_{k,l}) - Tb_{k,l}$ e quindi $f(b_{k,l}) - f(a_{k,l}) \leq T(b_{k,l} - a_{k,l})$. Di conseguenza

$$\begin{gathered} T \sum_{k\in I} \sum_{l\in I_k} (b_{k,l} - a_{k,l}) \leq \\ \sum_{k\in I} \sum_{l\in I_k} \big(f(b_{k,l}) - f(a_{k,l})\big) \leq \\ \sum_{k\in I} \big(f(b_k) - f(a_k)\big) \leq \\ t \sum_{k\in I} (b_k - a_k) \leq t(b - a). \end{gathered}$$

Infatti la prima disuguaglianza segue da quanto appena detto, la seconda da Osservazione 3 (con a_k al posto di a e b_k al posto di b), la terza segue da (10), e la quarta segue da Osservazione 3 con $f(x) = x$. D'altra parte, gli intervalli $]a_{k,l}, b_{k,l}[$, dato che sono contenuti negli intervalli disgiunti $]a_k, b_k[$ e sono disgiunti per k fissato, sono tutti disgiunti tra loro. Quindi

$$m_1\Big(\bigcup_{k,l} \left(]a_{k,l}, b_{k,l}[\right)\Big) = \sum_{k\in I} \sum_{l\in I_k} (b_{k,l} - a_{k,l}) \leq \frac{t}{T}(b - a).$$

Definiamo ora $\mathcal{Q}$ la famiglia degli insiemi della forma $\bigcup_{k\in I}]a_k, b_k[$ dove I è un insieme finito o numerabile di indici e gli intervalli $]a_k, b_k[$ sono disgiunti e contenuti in $]a, b[$. Tenendo conto anche di (9) e (11), quello che abbiamo provato si può riformulare così: $E_{t,T}$ è contenuto in un qualche $J \in \mathcal{Q}$ tale che $E_{t,T} \subseteq J$ e $m_1(J) \leq \frac{t}{T} m_1\big(]a,b[\big)$. D'altra parte possiamo fare lo stesso ragionamento su ogni intervallo $]c,d[\subseteq]a,b[$ e otteniamo:

$$\forall\ ]c,d[\,\subseteq\,]a,b[\ \ \exists J \in \mathcal{Q} : E_{t,T} \cap]c,d[\,\subseteq J \subseteq]c,d[,\ m_1(J) \leq \frac{t}{T} m_1\big(]c,d[\big).$$

Da questo possiamo dedurre

$$\forall J \in \mathcal{Q}\ \exists J' \in \mathcal{Q} : E_{t,T} \cap J \subseteq J' \subseteq J,\ m_1(J') \leq \frac{t}{T} m_1(J). \tag{12}$$

Infatti sia $J = \bigcup_{k \in I}]a_k, b_k[$ con le solite notazioni. Allora per ogni $k \in I$ esiste $J_k \in \mathcal{Q}$ tale che $E_{t,T} \cap]a_k, b_k[\subseteq J_k \subseteq]a_k, b_k[$ e $m_1(J_k) \leq \frac{t}{T} m_1\big(]a_k, b_k[\big)$. Allora, notando anche che i J_k essendo contenuti negli intervalli disgiunti $]a_k, b_k[$, sono a loro volta disgiunti, è facile vedere che $J' := \bigcup_{k \in I} J_k$ soddisfa (12). Usando (12) costruiamo induttivamente una successione di insiemi $J_n \in \mathcal{Q}$ con $J_0 =]a,b[$ tale che

$$E_{t,T} \cap J_n \subseteq J_{n+1} \subseteq J_n,\ m_1(J_{n+1}) \leq \frac{t}{T} m_1(J_n). \tag{13}$$

Ora, dato che $E_{t,T} \subseteq]a,b[= J_0$, segue per induzione da (13) che $E_{t,T} \subseteq J_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre $m_1(J_n) \leq \left(\frac{t}{T}\right)^n (b-a)$, e quindi $m_1(J_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ dato che $t < T$. Perciò $E_{t,T}$ è contenuto nell'insieme di misura nulla $\bigcap_{n=0}^{\infty} J_n$. Alla fine abbiamo provato (8) da cui come detto segue (6) e il teorema è completamente provato nel caso f continua.

Accenno ora le modifiche da fare nel caso f non necessariamente continua. Il Lemma 1 rimane valido con alcune piccole modifiche: invece che g continua supponiamo che esistano in ogni punto $g(x^\pm) := \lim_{y \to x^\pm} g(y)$, cosa che avviene sicuramente se g è crescente o anche la somma di una funzione crescente e di una funzione continua. Se $x \in]a,b[$ poniamo $G(x) = \max\{g(x), g(x^+), g(x^-)\}$, e poniamo $G(a) = g(a^+)$, $G(b) = g(b^-)$. Allora il lemma modificato in questa situazione dice che l'insieme degli $x \in]a,b[$ tali che esiste $\xi \in]x,b]$ per cui $g(\xi) > G(x)$ è un insieme aperto, unione di intervalli disgiunti $]a_k, b_k[$, $k \in I$, con I finito o numerabile, e si ha $g(a_k^+) \leq G(b_k)$. ■