**Cenni a soluzioni di esercizi dello scritto del 06/02/2014**

**Nota. Ho scritto la soluzione di alcuni esercizi dello scritto. Per questioni di tempo non ho scritto tutti i dettagli delle soluzioni. In qualche caso ho scritto meno dettagli di quelli che richiederei da uno studente in un compito. Inoltre, pur avendo controllato le soluzioni che ho scritto, e quindi essendo abbastanza tranquillo sulla correttezza di tali soluzioni, non assumo responsabilità in caso di imperfezioni (o anche errori).**

**1)** Determinare i numeri complessi $z$ che soddisfano $(z+i)^2(z-i)^2 = -1$ (scrivendone la parte reale e la parte immaginaria.)

Soluzione: Scriviamo

$$-1 = (z+i)^2(z-i)^2 = \big((z+i)(z-i)\big)^2 = (z^2+1)^2$$

quindi $z^2+1 = \pm i$ e $z^2 = -1 \pm i$. Allora basta trovare le radici quadrate complesse di $-1\pm i$. Potremmo cercarle in forma trigonometrica, ma forse è meglio un'altra via. Cerchiamo quelle di $-1+i$. Sia $z = x+iy$ tale che $z^2 = (x+iy)^2 = -1+i$. Si ha $-1+i = x^2-y^2+2ixy$, da cui $\begin{cases} x^2-y^2 = -1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$, quindi $\begin{cases} x^2 - \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = -1 \\ y = \dfrac{1}{2x} \end{cases}$, quindi $\begin{cases} 4x^4+4x^2-1 = 0 \\ y = \dfrac{1}{2x} \end{cases}$. Segue $x^2 = \dfrac{-2\pm\sqrt{8}}{4}$, ma scegliamo solo il segno $+$, dato che $x$ e $y$ parte reale e parte immaginaria di $z$ sono per definizione numeri reali, per cui $x = \pm\sqrt{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{2}}$. Abbiamo due soluzioni prendendo $x+iy$ con gli $x$ dati sopra e $y = \dfrac{1}{2x}$. In modo analogo si trovano le soluzioni di $z^2 = -1-i$.

**1 bis)** Determinare i numeri complessi $z$ che soddisfano $\left(\frac{1}{5z-i}\right)^2 = 1+i$ (scrivendone la parte reale e la parte immaginaria.)

Soluzione (Cenno) Si avrà $(5z-i)^2 = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1}{2}(1-i)$. A questo punto si trova $5z-i = \frac{\sqrt{2}}{2}$ moltiplicato per le radici complesse di $1-i$ che si trovano come prima. Dopo avere trovato tali radici (che scrivo come $\pm(a+ib)$), avrò $5z-i = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(a+ib)$ e quindi $z = \pm\Big(\frac{\sqrt{2}}{10}a + i\big(\frac{\sqrt{2}}{10}b+\frac{1}{5}\big)\Big)$.

**2)** Sia $f_a(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{e^{ax}-1}}$, $0 \neq a \neq 1$.

a) Risolvere l'equazione $f_2(x) = 7$.

Soluzione: Si ha

$$7 = \frac{1}{\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{e^{2x}-1}} = \frac{1}{\frac{e^x+1-1}{e^{2x}-1}} = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$$

da cui $e^{2x}-7e^x-1=0$, e, ponendo $e^x=t$, otteniamo $t=e^x=\dfrac{7\pm\sqrt{53}}{2}$, e notando che il numero $\frac{7-\sqrt{53}}{2}$ è negativo e quindi non può valere $e^x$, si ha $x=\ln\Big(\dfrac{7+\sqrt{53}}{2}\Big)$.

b) Determinare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{f_a(x)\big(\ln(1+2x)-2x\big)}{x^\beta}$, al variare di $a,\beta$ in $\mathbf{R}$, $0\neq a\neq 1$.
Soluzione: Si ha, usando la formula di Taylor,

$$f_a(x)=\frac{(e^{ax}-1)(e^x-1)}{e^{ax}-e^x}=\frac{\big(ax+x\alpha_1(x)\big)\big(x+x\alpha_2(x)\big)}{(a-1)x+x\alpha_3(x)},$$

$$\ln(1+2x)-2x=-\frac{(2x)^2}{2}+x^2\alpha_4(x)$$

Ove tutte $\alpha_i(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ per ogni $i=1,2,3,4$, quindi

$$\lim_{x\to0+}\frac{f_a(x)\big(\ln(1+2x)-2x\big)}{x^\beta}=\lim_{x\to0+}\frac{(ax^2)\cdot(-2x^2)}{(a-1)x\cdot x^\beta}=\lim_{x\to0+}\frac{-2a}{a-1}x^{3-\beta}$$

Segue che tale limite viene 0 se $\beta<3$, viene $\frac{-2a}{a-1}$ se $\beta=3$, viene $+\infty$ se $\beta>3$ e $a\in(0,1)$, $-\infty$ se $\beta>3$ e $a\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

c) Calcolare, se esiste il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{3n}}{(x^{\sqrt{n}}+1)^{\sqrt{2n}}+1}$, al variare di $x>0$.

Soluzione: Se $x\leq1$ il denominatore viene $\leq 2^{\sqrt{2n}}+1\leq 2^{2n}+1$ e quindi

$$\frac{e^{3n}}{(x^{\sqrt{n}}+1)^{\sqrt{2n}}+1}\geq\frac{e^{3n}}{2^{2n}+1}=\Big(\frac{e^3}{4}\Big)^n\frac{1}{1+\frac{1}{4^n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Se invece $x>1$, si ha, notando che $\sqrt{n}\sqrt{2n}=n\sqrt{2}$:

$$\frac{e^{3n}}{(x^{\sqrt{n}}+1)^{\sqrt{2n}}+1}=\frac{e^{3n}}{\Big(x^{\sqrt{n}}\big(1+\frac{1}{x^{\sqrt{n}}}\big)\Big)^{\sqrt{2n}}+1}=\frac{e^{3n}}{x^{n\sqrt{2}}}\frac{1}{\big(1+\frac{1}{x^{\sqrt{n}}}\big)^{\sqrt{2n}}+\frac{1}{x^{n\sqrt{2}}}}.$$

Ora proviamo che la seconda frazione $\frac{1}{\big(1+\frac{1}{x^{\sqrt{n}}}\big)^{\sqrt{2n}}+\frac{1}{x^{n\sqrt{2}}}}$ tende a 1. Basta provare che il primo addendo a denominatore tende a 1 e il secondo a 0. Quest'ultima cosa è evidente dato che $x>1$. Per provare che il primo addendo tende a 1, notiamo ora che

$$\lim_{x\to0^+}\big(1+\frac{1}{x^{\sqrt{n}}}\big)^{\sqrt{2n}}=\lim_{x\to0^+}e^{\sqrt{2n}\ln\left(1+\frac{1}{x^{\sqrt{n}}}\right)}=\lim_{x\to0^+}\big(e^{\sqrt{2}}\big)^{\frac{\sqrt{n}}{x^{\sqrt{n}}}}=1$$

ove abbiamo usato il limite notevole $\frac{\ln(1+y)}{y}\underset{y\to0}{\longrightarrow}1$ e l'altro limite $\frac{y}{x^y}\underset{y\to+\infty}{\longrightarrow}0$ se $x>1$, con $a=e^{\sqrt{2}}$, quindi $\frac{\sqrt{n}}{x^{\sqrt{n}}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Quindi il limite originario si riconduce al limite di

$\frac{e^{3n}}{x^{n\sqrt{2}}} = \left(\frac{e^3}{x^{\sqrt{2}}}\right)^n$ che vale $+\infty$ se $\frac{e^3}{x^{\sqrt{2}}} > 1$, ossia se $x < e^{\frac{3}{\sqrt{2}}}$, 1 se $\frac{e^3}{x^{\sqrt{2}}} = 1$, ossia se $x = e^{\frac{3}{\sqrt{2}}}$, 0 se $\frac{e^3}{x^{\sqrt{2}}} < 1$, ossia se $x > e^{\frac{3}{\sqrt{2}}}$.

**2 bis)** Sia $f_a(x) = \dfrac{\cos^a(x) - 1}{\frac{1}{\cos(x)} - 1}$.

a) Risolvere l'equazione $f_2(x) = 7$.

Soluzione: Si ha

$$7 = \frac{\cos^2(x) - 1}{\frac{1}{\cos(x)} - 1} = \frac{\cos^2(x) - 1}{\frac{1-\cos(x)}{\cos(x)}} = \frac{\cos(x)(\cos^2(x) - 1)}{1 - \cos(x)} = -\cos(x)\big(\cos(x) + 1\big).$$

Quindi $\cos^2(x) + \cos(x) + 7 = 0$. Questa equazione non ha soluzioni. Tale fatto si può per esempio vedere perché, sostituendo $t = \cos(x)$, si ha $t^2 + t + 7 = 0$ che non ha soluzioni, ma anche perché $\big|\cos(x)\big(\cos(x) + 1\big)\big| = |\cos(x)||\cos(x) + 1| \le 1 \cdot 2 = 2$ e quindi non si può avere $\cos(x)\big(\cos(x) + 1\big) = -7$.

b) Determinare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{f_a(x)\big(\sin(2x) - 2x\big)}{x^\beta}$, al variare di $a, \beta$ in $\mathbf{R}$.

Soluzione: Non dico i dettagli dato che è simile a quella dell'alto tema. Noto solo che

$$\cos^a(x) - 1 = \Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)^a - 1 = 1 - a\frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 = -\frac{a}{2}x^2 + o(x^2).$$

c) Calcolare, se esiste il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^7}{(\sqrt{n}^{\sqrt{x}}+1)^{\sqrt{x}}+1}$, al variare di $x > 0$.

Soluzione: Abbiamo

$$\frac{n^7}{(\sqrt{n}^{\sqrt{x}} + 1)^{\sqrt{x}} + 1} = \frac{n^7}{\Big(\sqrt{n}^{\sqrt{x}}\big(1 + \frac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{x}}}\big)\Big)^{\sqrt{x}} + 1} = \frac{n^7}{\sqrt{n}^x} \frac{1}{\big(1 + \frac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{x}}}\big)^{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{n}^x}}$$

Ora nell'ultimo membro il secondo fattore tende a 1, mentre il primo diventa $\frac{n^7}{n^{\frac{x}{2}}} = n^{7-\frac{x}{2}}$, e quindi la nostra espressione di partenza tende a $+\infty$ se $7 - \frac{x}{2} > 0$ ossia se $x < 14$, tende a 1 se $7 - \frac{x}{2} = 0$ ossia se $x = 14$, tende a 0 se $7 - \frac{x}{2} < 0$ ossia se $x > 14$,

**3)** Sia $g$ definita da $g(x) = e^x(x^2 - x + 2)^\pi$.

a) Determinare gli eventuali punti di minimo relativo e assoluto di $g$.

Soluzione: Calcoliamo la derivata di $g$. Si ha

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x\Big((x^2 - x + 2)^\pi + \pi(x^2 - x + 2)^{\pi-1}(2x - 1)\Big) \\ &= e^x(x^2 - x + 2)^{\pi-1}\big(x^2 - x + 2 + \pi(2x - 1)\big) \\ &= e^x(x^2 - x + 2)^{\pi-1}\big(x^2 + (2\pi - 1)x + 2 - \pi\big) \end{aligned}$$

Ora $e^x > 0$ per ogni $x$, e pure $x^2 - x + 2 > 0$ per ogni $x$ dato che il suo $\Delta$ è negativo, e pertanto $(x^2 - x + 2)^{\pi-1}$ è definito e positivo per ogni $x$. Il terzo fattore è un polinomio di secondo grado, che si annulla in due punti $x_1 < x_2$ definiti da

$$x_{1,2} = \frac{1 - 2\pi \pm \sqrt{4\pi^2 - 7}}{2}$$

Pertanto, la funzione $g$ è strettamente crescente in $(-\infty, x_1]$, strettamente decrescente in $[x_1, x_2]$, e strettamente crescente in $[x_2, +\infty)$. Il punto $x_2$ è di minimo relativo, ma non assoluto dato che la funzione in tale punto è positiva, mentre tende a 0 per $x \to -\infty$.

b) Dire se esistono $a > 0$ e $n$ intero positivo tali che $g(x) < ax^n$ per ogni $x > 100$.

Soluzione: Non esistono dato che, fissati $n$ ed $a$, si vede facilmente che $\frac{g(x)}{x^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ per gli ordini di infinito. Quindi esiste $x > 100$ (in realtà ogni $x$ maggiore di un opportuno numero ha questa proprietà) tale che $\frac{g(x)}{x^n} > a$.

**3 bis)** Sia $g$ definita da $g(x) = x^2(x^2 - 2x + 6)^{\sqrt{6}}$. a) Determinare gli eventuali punti di minimo relativo e assoluto di $g$.

Soluzione: Abbiamo

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x(x^2 - 2x + 6)^{\sqrt{6}} + x^2\sqrt{6}(x^2 - 2x + 6)^{\sqrt{6}-1}(2x - 2) \\ &(x^2 - 2x + 6)^{\sqrt{6}-1}(2x)\big((1 + \sqrt{6})x^2 - (2 + \sqrt{6})x + 6\big) \end{aligned}$$

ove ho sintetizzato i calcoli. Ora $x^2 - 2x + 6 > 0$ per ogni $x$ dato che ha un $\Delta > 0$, quindi il primo fattore è sempre definito e positivo. Il terzo è positivo per motivi analoghi. Il secondo è positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$. Quindi, $g'(x) > 0$ se $x > 0$, $g'(x) < 0$ se $x < 0$, e 0 è un punto di minimo non solo relativo, ma anche assoluto per $g$.

b) Dire se esistono $a > 0$ e $n$ intero positivo tali che $g(x) < ax^n$ per ogni $x > 710$.

Soluzione: Scelgo $n > 2 + 2\sqrt{6}$, e allora $\frac{g(x)}{x^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. In tal caso, posto $s(x) := \frac{g(x)}{x^n}$, dato che $s$ è sempre positiva per $x \geq 710$, è facile vedere che ha un massimo positivo in $[710, +\infty)$, e quindi basta prendere $a$ maggiore di tale massimo, e, stando un po' attenti, è facile vedere che basta in realtà prendere $a = 1$.

**4)** Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \arctan(2x)\frac{x^2}{1 + 4x^2}\,dx$.

Soluzione: Notiamo che $\dfrac{x^2}{1 + 4x^2} = \dfrac{1}{4}\big(1 - \dfrac{1}{1 + 4x^2}\big)$, quindi

$$\int \arctan(2x)\frac{x^2}{1 + 4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \arctan(2x)\,dx - \frac{1}{4}\int \arctan(2x)\frac{1}{1 + 4x^2}\,dx.$$

Calcoliamo il primo integrale per parti:

$$\int \arctan(2x)\,dx = x\arctan(2x) - \int \frac{2x}{1 + 4x^2}\,dx = x\arctan(2x) - \frac{1}{4}\ln(1 + 4x^2) + c$$

Calcoliamo il secondo integrale

$$\int \arctan(2x)\frac{1}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int y\,dy\;_{y=\arctan(2x)} = \frac{1}{4}\arctan^2(2x)+c.$$

In conclusione

$$\int \arctan(2x)\frac{x^2}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}x\arctan(2x) - \frac{1}{16}\ln(1+4x^2) - \frac{1}{16}\big(\arctan(2x)\big)^2 + c.$$

**4 bis)** Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{t}{t+14}\ln(t+14)\,dt$.

Soluzione:

$$\int \frac{t}{t+14}\ln(t+14)\,dt = \int \frac{y-14}{y}\ln(y)\,dy = \int \ln(y)\,dy - 14\int \frac{\ln(y)}{y}\,dy\;_{y=t+14}$$

Integrando il primo integrale per parti si ottiene $\displaystyle\int \ln(y)\,dy = y\ln(y)-y+c$. Integrando il secondo si ottiene

$$\int \frac{\ln(y)}{y}\,dy = \int z\,dz\;_{z=\ln(y)} = \frac{1}{2}\big(\ln(y)\big)^2 + c$$

In conclusione

$$\int \frac{t}{t+14}\ln(t+14)\,dt = (t+14)\ln(t+14) - (t+14) - 7\big(\ln(t+14)\big)^2 + c.$$

**5)** a) Sia $f$ una funzione $C^1$ da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $f'(0)>0$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 9$. Provare che esiste $x>0$ tale che $f(x)=f(-x)$.

Soluzione: Poniamo $g(x)=f(x)-f(-x)$. Dato che $f'$ è positiva, e quindi $f$ è strettamente crescente in un opportuno intervallo $(-\delta,\delta)$ con $\delta>0$, si ha, per esempio $f\big(-\frac{\delta}{2}\big) < f\big(\frac{\delta}{2}\big)$, e quindi $g(\frac{\delta}{2})>0$. D'altra parte per ipotesi, $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -7$, e quindi esiste $x_1$ tale che $g(x_1)<0$. Dato che $g$ è continua, per il teorema dell'esistenza degli zeri, esiste $x$ tale che $g(x)=0$, e quindi $f(x)=f(-x)$.

b) Siano $v$ e $w$ due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tali che $v(x)>w(x)$ per ogni $x\in\mathbf{R}$, e inoltre le funzioni $v+w$ e $v\cdot w$ sono entrambe continue. Provare che $v$ e $w$ sono continue.

Soluzione: Posto $\alpha=v+w$ e $\beta=v\cdot w$, sappiamo per ipotesi che $\alpha$ e $\beta$ sono continue. Ora troviamo $v$ e $w$ in termini di $\alpha$ e $\beta$. Si ha:

$$\beta(x)=v(x)w(x)=v(x)\big(\alpha(x)-v(x)\big) \Rightarrow v^2(x)-\alpha(x)v(x)+\beta(x)=0,$$

e, scambiando $v$ e $w$, si ha anche $w^2(x)-\alpha(x)w(x)+\beta(x)=0$, ossia, fissato $x$, $v(x)$ e $w(x)$ sono le due soluzioni dell'equazione di secondo grado (in $y$) $y^2-\alpha(x)y+\beta(x)=0$.

Dato che tale equazione ha due soluzioni distinte (appunto $v(x)$ e $w(x)$, che sono distinte dato che per ipotesi, $v(x) > w(x)$), significa che tale equazione ha il $\Delta > 0$, e le soluzioni sono $v(x) = \frac{\alpha(x)+\sqrt{\alpha^2(x)-4\beta(x)}}{2}$, e $w(x) = \frac{\alpha(x)-\sqrt{\alpha^2(x)-4\beta(x)}}{2}$, che sono continue, essendo ottenute da $\alpha$ e $\beta$, continue per ipotesi, mediante operazioni come somma, prodotto e composizione con al radice quadrata.

**5 bis)** a) Sia $f$ una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che ha un minimo assoluto in $\mathbf{R}$. Provare che esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) = f(x+1)$.

Soluzione: Sia $\bar{x}$ un punto di minimo assoluto di $f$, e poniamo $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Alloara $g$ è continua. Inoltre $g(\bar{x}) = f(\bar{x}+1) - f(\bar{x}) \geq 0$, e $g(\bar{x}-1) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}-1) \leq 0$, proprio perché per ipotesi $f(\bar{x}-1) \geq f(\bar{x})$, e $f(\bar{x}+1) \geq f(\bar{x})$. Per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste $x$ tale che $g(x) = 0$, e quindi $f(x+1) = f(x)$.

b) Siano $v$ e $w$ due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tali che $v(x) > 0$, $w(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e inoltre le funzioni $v + w$ e $\frac{v}{w}$ sono entrambe derivabili. Provare che $v$ e $w$ sono derivabili.

Soluzione: Posto $\alpha = v + w$, e $\beta = \frac{v}{w}$, per ipotesi $\alpha$ e $\beta$ sono derivabili. Inoltre si ha $v = \beta w$, e $\alpha = w + \beta w = w(1+\beta)$, quindi

$$w(x) = \frac{\alpha(x)}{1+\beta(x)},$$

ove abbiamo usato il fatto che $1+\beta(x) > \beta(x) > 0$, e quindi possiamo dividere per $1+\beta(x)$. In conclusione, essendo derivabili $\alpha$ e $\beta$, è derivabile anche $w$, e quindi anche $v = \beta w$.