# Logica e Reti Logiche

## Esercitazione

Francesco Pasquale

30 ottobre 2025

**Esercizio 1.** Usando il metodo dei *tableaux* verificare che le seguenti formule sono tautologie

1. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
2. $((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$
3. $((p \to q) \wedge (p \to r)) \to (p \to (q \wedge r))$
4. $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$

**Esercizio 2.** Usando il metodo dei *tableaux* determinare se le seguenti formule sono tautologie oppure no. Per quelle che non lo sono, esibire un'interpretazione che le rende false

1. $((p \to q) \wedge (q \to \neg p)) \to \neg p$
2. $(((p \vee q) \to r) \wedge (p \to (q \vee r))) \to (p \to r)$
3. $((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \to (p \vee (q \wedge r))$

**Esercizio 3.** Usando il metodo dei *tableaux* determinare se le seguenti formule sono contraddizioni oppure no. Per quelle che non lo sono, esibire un'interpretazione che le rende vere

1. $p \to \neg p$
2. $((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge \neg(p \vee r)$
3. $((p \to q) \wedge (q \to \neg p)) \to p$

---

Una formula si dice in *forma normale congiuntiva (CNF)*[1] se è una congiunzione di *clausole disgiuntive* (dette anche semplicemente *clausole*) $D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n$ dove ogni

[1] *Conjunctive Normal Form*

clausola è una disgiunzione di *letterali* $D_i = \ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \cdots \vee \ell_{i,k_i}$ e ogni letterale è una variabile oppure una variabile negata. Per esempio,

$$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

è in forma normale congiuntiva. Data una formula $X$ esiste sempre una formula $Y$ equivalente[2] a $X$ in forma normale congiuntiva.

**Esercizio 4.** Per ognuna delle formule negli Esercizi 1, 2 e 3, dare una formula equivalente in forma normale congiuntiva.

**Esercizio 5.** Trovare un metodo che, data una formula $X$, vi consenta di trovare una formula $Y$ in forma normale congiuntiva equivalente a $X$.

**Resolution.** Considerate il seguente metodo che trasforma una formula $D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n$ in forma normale congiuntiva in una nuova formula in forma normale congiuntiva (oppure la lascia com'è):

1. Eliminate ogni clausola $D_i$ che contiene sia una variablile $x$ che la sua negata $\neg x$;
2. Per ogni coppia di clausole $D_i$ e $D_j$ in cui una contiene una variabile $x$ e l'altra contiene la sua negata $\neg x$ aggiungete una nuova clausola $Z_{i,j;x}$ con tutti i letterali in $D_i$ e $D_j$ esclusi $x$ e $\neg x$. Per esempio, se $D_i = (p \vee \neg q \vee r)$ e $D_j = (p \vee q \vee \neg s)$, siccome in $D_i$ compare $\neg q$ e in $D_j$ compare $q$ dovete aggiungere la clausola $(p \vee r \vee \neg s)$;[a]
3. Eliminate tutte le clausole $D_i, D_j$ coinvolte nel punto precedente.

[a](Nota bene: questo significa anche che, se per esempio $D_i = (p)$ e $D_j = (\neg p)$, dovete aggiungere una clausola () *vuota*)

**Esercizio 6.** Sia $X$ una formula in forma normale congiuntiva e sia $Y$ la formula ottenuta da $X$ eseguendo i punti 1, 2 e 3 qui sopra. Dimostrare che $X$ è soddisfacibile[3] se e soltanto se $Y$ è soddisfacibile.

**Esercizio 7.** Per ognuna delle formule $X$ in forma normale congiuntiva trovate nell'Esercizio 4, costruire la formula $X_1$ ottenuta applicando i tre punti di *Resolution* a $X$, poi $X_2$ ottenuta applicando *Resolution* a $X_1$ e così via fino a raggiungere una formula $X_k$ che non viene più modificata da *Resolution*. In quali casi arrivate ad ottenere almeno una clausola vuota? Che cosa potete concludere sulla formula $X$ di partenza quando durante queste iterazioni arrivate ad ottenere una formula che contiene una clausola vuota?

[2]Ricorda che in logica proposizionale due formule $X$ e $Y$ sono *equivalenti* se hanno la stessa tabella di verità

[3]Ricorda che una formula si dice *soddisfacibile* se esiste almeno una interpretazione che la rende vera

Una formula si dice in *forma normale disgiuntiva (DNF)*[4] se è una disgiunzione di *clausole congiuntive* $C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_n$ dove ogni clausola è una congiunzione di *letterali* $C_i = \ell_{i,1} \wedge \ell_{i,2} \wedge \cdots \wedge \ell_{i,k_i}$ e ogni letterale è una variabile oppure una variabile negata. Per esempio,

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

è in forma normale disgiuntiva. Data una formula $X$ esiste sempre una formula $Y$ equivalente a $X$ in forma normale disgiuntiva.

**Esercizio 8.** Per ognuna delle formule degli Esercizi 1, 2 e 3, dare una formula equivalente in forma normale disgiuntiva.

**Esercizio 9.** Trovare un metodo che, data una formula $X$, vi consenta di trovare una formula $Y$ in forma normale disgiuntiva equivalente a $X$.

**Esercizio 10.** Riflettere sulla relazione che c'è fra il metodo dei *tableaux* e la forma normale disgiuntiva.

---

Sia $\mathcal{A}$ il sistema assiomatico definito dai seguenti schemi di assiomi

**A1** : $X \to (Y \to X)$

**A2** : $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$

**A3** : $(\neg X \to Y) \to (\neg Y \to X)$

e dalla regola di inferenza *Modus Ponens*

$$\frac{X,\ X \to Y}{Y}\ .$$

**Esercizio 11.** Verificare che le formule **A1**, **A2** e **A3** sono tautologie.

**Esercizio 12.** Dimostrare che nel sistema $\mathcal{A}$

1. $\vdash p \to p$
2. $\vdash \neg\neg p \to p$

Sia $\mathcal{B}$ il sistema assiomatico definito dai seguenti schemi di assiomi

**B1** : $(X \wedge Y) \to X$

**B2** : $(X \wedge Y) \to Y$

**B3** : $((X \wedge Y) \to Z) \to (X \to (Y \to Z))$

**B4** : $((X \to Y) \wedge (X \to (Y \to Z))) \to (X \to Z)$

[4] *Disjunctive Normal Form*

e dalla regola di inferenza *Modus Ponens*.

**Esercizio 13.** Verificare che le formule **B1**, **B2**, **B3** e **B4** sono tautologie.

**Esercizio 14.** Dimostrare che nel sistema $\mathcal{B}$

1. $\vdash p \to (q \to q)$
2. $\{p \wedge q \to r\} \vdash p \to (q \to r)$
3. $\{p \to q,\, p \to (q \to r)\} \vdash p \to r$
   *(Suggerimento: Usare opportunamente gli assiomi **B4** e **B3**)*
4. $\vdash p \to (q \to p)$
5. $\{p \to q,\, q \to r\} \vdash p \to r$
   *(Suggerimento: Usare il punto precedente, che dice che si può derivare una formula del tipo $X \to (Y \to X)$)*

**Esercizio 15.** Per ognuna delle seguenti formule, dire se è un teorema nel sistema $\mathcal{B}$ oppure no. In caso affermativo esibire una dimostrazione, in caso negativo spiegare perché non può essere un teorema

1. $p \to (p \to q)$
2. $(p \wedge (p \to q)) \to q$
3. $((p \to r) \wedge (q \to r)) \to (r \to (p \wedge q))$

**Esercizio 16.** Riflettere sulla relazione che c'è fra la regola di inferenza *Modus Ponens* e i punti 2 e 3 del metodo *resolution*.

---

**Esercizio 17.** Avete davanti a voi quattro porte, $X, Y, Z, W$, e otto guardiani, $A, B, C, D, E, F, G, H$. Ognuno dei guardiani può dire la verità oppure mentire. I guardiani fanno le seguenti affermazioni:

A: $X$ è una porta buona

B: Almeno una delle porte $Y, Z$ è buona

C: $A$ e $B$ dicono la verità

D: $X$ e $Y$ sono entrambe porte buone

E: $X$ e $Z$ sono entrambe porte buone

F: Almeno uno dei guardiani $D, E$ dice la verità

G: Se $C$ dice la verità, anche $F$ dice la verità

H: Se $G$ e io diciamo la verità, anche $A$ dice la verità

Almeno una delle porte è buona. Potete scegliere una sola porta. Una catastrofe si abbatterà su di voi se non scegliete una porta buona.
Che porta scegliete? Perché?