Logica e Reti Logiche

Esercitazione

Francesco Pasquale

16 ottobre 2025

Esercizio 1. Trovare una funzione biunivoca da $\mathbb{N}$ all'insieme dei numeri dispari.

Esercizio 2. Dimostrare per assurdo che i numeri primi sono infiniti.

Esercizio 3. Dimostrare per assurdo che $\sqrt{2}$ non è un numero *razionale*[1].

Esercizio 4. Dimostrare per induzione che

1. Per ogni $n \geqslant 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,;$$

2. Per ogni $n \geqslant 1$, $n^3 - n$ è divisibile per 3

Nell'esercizio precedente abbiamo dimostrato che $\frac{n(n+1)}{2}$ è una espressione in forma chiusa della somma $\sum_{k=1}^{n} k$ e che $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ lo è della somma $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Esercizio 5. Trovare una espressione in forma chiusa di $\sum_{k=1}^{n}(k+3)^2$.

Esercizio 6. Si consideri la seguente ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= 2a_n + 1, \qquad \text{per ogni } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Trovare una espressione in forma chiusa per a_n (ossia scrivere a_n in funzione di n) e dimostrare per induzione che è corretta.

[1] Ossia, non esistono due numeri $p, q \in \mathbb{N}$ tali che $p/q = \sqrt{2}$

Esercizio 7. Sia $\{a_n\}$ la successione definita dalla seguente ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 2 \\ a_2 &= 3 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \qquad \text{per ogni } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $a_n \leqslant 2^n$ per ogni $n \geqslant 0$.

Esercizio 8. Sia $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ la successione dei numeri di Fibonacci,

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{per } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$, per ogni $n \geqslant 1$.

Esercizio 9. Scrivere le tabelle di verità[2] delle seguenti formule:

1. $(p \to q) \vee \neg p$
2. $(p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
3. $(p \to (p \equiv q)) \vee \neg(p \vee q)$
4. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Esercizio 10. Scrivere come formule proposizionali le frasi seguenti:

1. Condizione sufficiente affinché x sia dispari è che x sia primo e maggiore di 2;
2. Fiorello va al cinema solo se si sta proiettando una commedia;
3. Condizione necessaria e sufficiente perché uno sceicco sia felice è avere vino, donne e canti;
4. Condizione necessaria affinché una successione s sia convergente è che s sia limitata.

Esercizio 11. Per ognuna delle seguenti tabelle di verità, trovare una formula corrispondente

[2] Ricordiamo le tabelle di verità dei connettivi principali

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \equiv q$	$p \downarrow q$	$p \mid q$
T	T	F	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T	T	T

p	q	r	???
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

p	q	r	???
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

Una formula si dice in *forma normale congiuntiva (CNF)*[3] se è una congiunzione di *clausole disgiuntive* (dette anche semplicemente *clausole*) $D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n$ dove ogni clausola è una disgiunzione di *letterali* $D_i = \ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \cdots \vee \ell_{i,k_i}$ e ogni letterale è una variabile oppure una variabile negata. Per esempio,

$$(p \vee q \vee \neg r) \ \wedge \ (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

è in forma normale congiuntiva.

Una formula si dice in *forma normale disgiuntiva (DNF)*[4] se è una disgiunzione di *clausole congiuntive* $C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_n$ dove ogni clausola è una congiunzione di *letterali* $C_i = \ell_{i,1} \wedge \ell_{i,2} \wedge \cdots \wedge \ell_{i,k_i}$ e ogni letterale è una variabile oppure una variabile negata. Per esempio,

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \ \vee \ (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

è in forma normale disgiuntiva.

Data una formula X esistono sempre una formula Y_1 in forma normale congiuntiva e una formula Y_2 in forma normale disgiuntiva equivalenti a X.

Esercizio 12. Sia X la formula seguente

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \vee (r \equiv \neg p)$$

Scrivere due formule equivalenti a X, una in forma normale congiuntiva e l'altra in forma normale disgiuntiva.

Esercizio 13. Per ognuna delle seguenti formule, dire se è una tautologia, una contraddizione, o una contingenza.

1. $(p \to q) \to (q \to p)$
2. $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$
3. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
4. $p \to \neg p$
5. $p \equiv \neg p$
6. $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$
7. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
8. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

[3] *Conjunctive Normal Form*

[4] *Disjunctive Normal Form*

9. $(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \vee q)$
10. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
11. $(p \equiv (p \wedge q)) \equiv (q \equiv (p \vee q))$

Esercizio 14. Ridurre le formule seguenti, che contengono le costanti `t` (`True`) e `f` (`False`) a formule che o non contengono né `t` né `f`, oppure sono uguali o a `t` o a `f`:

1. $((\mathtt{t} \to p) \wedge (q \vee \mathtt{f})) \to ((q \to \mathtt{f}) \vee (r \to \mathtt{t}))$
2. $(p \vee \mathtt{t}) \to q$
3. $\neg(p \vee \mathtt{t}) \equiv (\mathtt{f} \to q)$
4. $(\neg(p \vee \mathtt{f}) \wedge (q \equiv \mathtt{t})) \to (r \wedge \mathtt{t})$

Esercizio 15.
1. Definire il connettivo $\wedge$ in termini dei connettivi $\neg$ e $\to$
2. Definire il connettivo $\equiv$ in termini dei connettivi $\wedge$ e $\to$
3. Definire il connettivo $\vee$ in termini del connettivo $\to$
4. Definire il connettivo $\neg$ in termini del connettivo $\to$ e di `f`

Esercizio 16.
1. Definire ognuno dei connettivi $\wedge$, $\to$, $\equiv$, in termini dei connettivi $\vee$ e $\neg$;
2. Definire ognuno dei connettivi $\vee$, $\to$, $\equiv$, in termini dei connettivi $\wedge$ e $\neg$.

Esercizio 17.
1. Definire i connettivi $\vee$ e $\neg$ in termini del connettivo $\downarrow$
2. Definire i connettivi $\wedge$ e $\neg$ in termini del connettivo $|$

Esercizio 18. Scrivere le formule $(p \to \neg q) \vee r$ e $(p \vee q) \wedge (\neg r \to p)$ in notazione polacca.

Esercizio 19. Scrivere le formule dell'Esercizio 9 in notazione polacca.

Esercizio 20. Ad ogni sequenza $\mathcal{F}$ di simboli e lettere possiamo associare un numero in questo modo: contiamo $+1$ per ognuno dei simboli $\to, \wedge, \vee$ e $\equiv$, contiamo 0 per il simbolo $\neg$ e contiamo -1 per ogni lettera; infine associamo a $\mathcal{F}$ la somma dei numeri.

Sia $\mathcal{F}$ una sequenza di lettere e simboli. Dimostrare, per induzione sulla lunghezza di $\mathcal{F}$, che $\mathcal{F}$ è una f.b.f. in notazione polacca se e solo se il numero associato a $\mathcal{F}$ è -1 e la somma dei simboli di ogni segmento iniziale proprio (sottostringa iniziale) è maggiore o uguale a 0.