# Logica e Reti Logiche
## (Episodio 7: Introduzione alla Logica del Primo Ordine)

Francesco Pasquale

3 novembre 2025

Finora abbiamo studiato la Logica Proposizionale, che è utile a formalizzare ragionamenti di questo tipo: dalle affermazioni "*Se piove esco con l'ombrello*" e "*Oggi piove*" posso dedurre che "*Oggi esco con l'ombrello*" (da $p \to q$ e $p$ segue $q$).

Per formalizzare ragionamenti di questo tipo: dalle affermazioni "Tutti gli uomini sono mortali" e "Socrate è un uomo" posso dedurre che "Socrate è mortale" dobbiamo introdurre la *Logica del Primo Ordine* (o *Logica dei Predicati*).

## 1 Antipasto

Prima di addentrarci nelle descrizione precisa di sintassi (quali sono i simboli che usiamo, le formule ben formate, ...) e semantica (cos'è una interpretazione, quando una formula è vera o falsa, ...) della logica del primo ordine, vediamo qualche esempio che dovrebbe essere comprensibile attingendo a ciò che già sappiamo e usando un po' di intuito. Consideriamo la seguente sequenza di simboli

$$\forall x[P(x) \vee Q(x)] \tag{1}$$

Ricordate che, nel caso della logica proposizionale, una *interpretazione* di una formula ben formata è una assegnazione di verità per le variabili. Data una interpretazione, abbiamo visto che una formula risulta `T` oppure `F`.

Secondo voi quale può essere una "interpretazione" di una formula tipo la (1)? Vediamo. Dobbiamo specificare due cose:

1. Un *dominio* all'interno del quale si muove la variabile $x$;
2. Una *proprietà* per ognuna delle due lettere predicative $P$ e $Q$.

Una volta che specifichiamo queste due cose la formula in (1) diventa `T` o `F`. Non ci credete? Facciamo qualche esempio.

**Esempio.** Prendiamo come dominio i numeri naturali $\mathbb{N}$. Per quanto riguarda le due lettere predicative $P$ e $Q$, assegniamogli queste proprietà $P(x)$ è "$x$ è pari" e $Q(x)$ è "$x$ è dispari". In questa *interpretazione* la Formula (1) diventa "Per ogni numero naturale $x$, $x$ è pari oppure $x$ è dispari". Direi che è senz'altro vera (a meno che non mi presentate un numero naturale che non è né pari né dispari).

**Esempio.** Dominio $\mathbb{N}$, $P(x)$ = "$x$ è un numero primo", $Q(x)$ = "$x$ è una potenza di 2". In questa interpretazione la (1) è falsa. Infatti, per esempio, il numero naturale 6 non è né un numero primo né una potenza di 2.

Nei due esempi qui sopra ho usato delle interpretazioni con degli "oggetti matematici", ma una interpretazione di una formula può riferirsi essenzialmente a qualunque cosa.

**Esempio.** Dominio: Persone; $P(x)$ = "$x$ è maschio"; $Q(x)$ = "$x$ è femmina". Direi che la (1) è vera anche in questa interpretazione.

**Esercizio 1.** Trovare altre due interpretazioni della (1), una in cui è vera, l'altra in cui è falsa.

Nella formula (1) le lettere predicative, $P$ e $Q$, hanno un solo argomento, indicano quindi una *proprietà* degli elementi del dominio. Le lettere predicative posso avere più argomenti, nel qual caso indicano delle *relazioni* fra gli elementi del dominio.

**Esempio.** Consideriamo la formula

$$\exists x \forall y P(x, y) \tag{2}$$

Interpretazione 1: Prendiamo come dominio $\mathbb{N}$ e come $P(x, y)$ la relazione "$x$ è minore o uguale a $y$". In questa interpretazione la Formula (2) risulta "Esiste un numero naturale $x$ tale che per ogni numero naturale $y$, abbiamo che $x$ è minore o uguale a $y$". Possiamo anche scriverla con la usuale simbologia usata in matematica

$$\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N},\ x \leqslant y$$

Sarete d'accordo che la (2) è vera in questa interpretazione. Infatti, c'è il numero naturale 1, per cui vale che tutti i numeri naturali sono maggiori o uguali a 1. D'altra parte, è facile trovare delle interpretazioni in cui la (2) è falsa, per esempio: Interpretazione 2: Dominio $\mathbb{Z}$ e $P(x, y)$ come prima; oppure Interpretazione 3: Dominio $\mathbb{N}$ e $P(x, y)$ con la disuguaglianza invertita ($x \geqslant y$).

**Esercizio 2.** Trovare altre due interpretazioni della (2), una in cui è vera, l'altra in cui è falsa.

Ora considerate questa formula

$$\forall x P(x) \to \exists x P(x) \tag{3}$$

**Esercizio 3.** Dare tre interpretazioni diverse della (3). Qual è il valore di verità nelle tre interpretazioni? Riuscite a trovare una interpretazione in cui la (3) è falsa?

Ragioniamo intuitivamente. La Formula (3) è una *implicazione*. Quindi, per quello che sappiamo dalla logica proposizionale, l'unico caso in cui è `F` è quando la premessa è `T` e la conseguenza è `F`. Nella (3) la premessa è $\forall x P(x)$ e la conseguenza è $\exists x P(x)$. Ora osservate che qualunque dominio scegliete e qualunque sia la proprietà $P$ che considerate, se la premessa risulta vera (ossia, è vero che la proprietà $P$ vale per tutti gli elementi del dominio) deve per forza valere anche la conseguenza (ossia, esiste un elemento del dominio per cui vale la proprietà $P$). Quindi la Formula (3) deve essere vera in ogni interpretazione.

Considerate la formula seguente,

$$[\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)] \rightarrow \exists x[P(x) \wedge Q(x)] \tag{4}$$

pensate che sia vera in ogni interpretazione oppure no? E l'implicazione nel verso opposto?

$$\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow [\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)] \tag{5}$$

**Esercizio 4.** Per ognuna delle Formule (4) e (5) dire se secondo voi è vera in ogni interpretazione oppure no. In caso affermativo, dare una spiegazione intuitiva della vostra risposta, in caso negativo fornire un *controesempio* (ossia, esibire un'interpretazione in cui la formula è falsa).

# 2 Sintassi e semantica

I simboli che usiamo nella logica del primo ordine sono:

- I *connettivi* ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\ldots$) usati anche nella logica proposizionale.
- Le *variabili* ($x$, $y$, $z$, $\ldots$ oppure $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\ldots$), che qui chiamiamo *individuali*, per distinguerle dalle variabili *Booleane* della logica proposizionale. Le variabili individuali possono assumere valori in qualunque dominio.
- Le *lettere predicative* ($P$, $Q$, $R$, $\ldots$ oppure $P_1$, $P_2$, $P_3$, $\ldots$). A volte può essere utile indicare con un apice il numero di argomenti (per esempio, $P^{(n)}$).
- I *quantificatori* ($\forall$ e $\exists$).

In aggiunta ai simboli qui sopra, che abbiamo già utilizzato intuitivamente nella sezione precedente, useremo anche altri simboli:

- Le *costanti* ($a$, $b$, $c$, $\ldots$ oppure $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\ldots$), che servono ad indicare specifici elementi del dominio.
- Le *lettere funzionali* ($f$, $g$, $h$, $\ldots$ oppure $f_1$, $f_2$, $f_3$, $\ldots$). Per esempio, $f(x_1, x_2)$ indicherà una funzione che mappa una coppia ordinata $(x_1, x_2)$ di elementi del dominio in un altro elemento del dominio $f(x_1, x_2)$. Come per le lettere predicative, anche nel caso delle lettere funzionali può essere utile indicare con un apice il numero di argomenti della funzione.

Dobbiamo definire cosa si intende per *formula ben formata* nella logica del primo ordine. Per farlo, abbiamo prima bisogno di definire cos'è un *termine*.

**Definizione 2.1** (Termine)**.** Le variabili e le costanti sono *termini*. Se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini e $f^{(n)}$ è una lettera funzionale con $n$ argomenti, allora anche $f^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine.

Ora possiamo dare una definizione precisa di *formula ben formata*

**Definizione 2.2** (Formule ben formate)**.** Se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini e $P^{(n)}$ è una lettera predicativa con $n$ argomenti, allora $P^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ è una formula ben formata (f.b.f.). Queste si chiamano formule *atomiche*. Inoltre,

1. Se $\mathcal{F}$ è una f.b.f., allora anche $\neg\mathcal{F}$ è una f.b.f.

2. Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono f.b.f. allora anche $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ è una f.b.f., dove con $\circ$ abbiamo indicato uno qualunque dei connettivi $\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv$.
3. Infine, se $\mathcal{F}$ è una f.b.f. e $x$ è una variabile, allora anche $\forall x \mathcal{F}$ e $\exists x \mathcal{F}$ sono f.b.f.
4. Nient'altro è una f.b.f.

**Esercizio 5.** Verificare che le Formule (1)-(5) nella Sezione 1 precedente sono f.b.f. in accordo alla Definizione 2.2.

Ora che abbiamo definito con precisione quali sono le formule ben formate (la *sintassi*) della logica del primo ordine, andiamo a descriverne il significato (la *semantica*).

**Definizione 2.3** (Interpretazione)**.** Data una f.b.f. $\mathcal{F}$, una sua *interpretazione* consiste in

- Un insieme non vuoto $D$ che chiamiamo dominio;
- Una proprietà o una relazione per ogni lettera predicativa $P$ in $\mathcal{F}$;
- Una funzione per ogni lettera funzionale $f$ in $\mathcal{F}$;
- Un elemento del dominio per ogni costante $a$ in $\mathcal{F}$.

Nel determinare la verità o meno di una formula in una data interpretazione, il significato dei connettivi che hanno nella logica proposizionale, il significato dei quantificatori è quello usuale.

**Esempio.** Consideriamo la formula

$$\forall x \exists y P(f(x, a), y) \tag{6}$$

Interpretazione 1. Dominio $\mathbb{N}$; $P(x, y) =$ "$x$ è uguale a $y$"; $f(x, y) = x^y$; $a = 2$. In questa interpretazione la formula si legge "Per ogni numero naturale $x$ esiste un numero naturale $y$ tale che $x^2 = y$". Direi che è `T`.

Interpretazione 2. Tutto come nell'Interpretazione 1, tranne che $P(x, y) =$ "$x$ è maggiore di $y$". In questa interpretazione la (6) si legge, "Per ogni numero naturale $x$ esiste un numero naturale $y$ tale che $x^2$ è maggiore di $y$". Quindi è `F`, perché non è vera per $x = 1$.

**Esercizio 6.** Trovare altre due interpretazioni della (6), una in cui è `T`, l'altra in cui è `F`.

# 3 Variabili libere e vincolate. Formule chiuse

Per tutte le formule viste finora, una volta data una interpretazione $I$, la formula risultava `T` o `F` nell'interpretazione $I$. Tuttavia, questo non è vero per ogni f.b.f. in accordo alla Definizione 2.2. Per esempio, osservate che la formula $\forall x P(x, y)$ è una f.b.f. secondo la Definizione 2.2. Proviamo a darne una interpretazione: dominio $\mathbb{N}$ e $P(x, y) =$"$x$ è maggiore di $y$". In questa interpretazione la formula si legge "Per ogni numero naturale $x$ si ha che $x$ è maggiore di $y$". Vera o falsa? Non si può dire perché non sappiamo chi è $y$. In quella formula si dice che $x$ è una variabile *vincolata*, mentre $y$ è *libera*.

**Definizione 3.1** (Variabili libere e vincolate)**.** In una f.b.f. si dice *vincolata* una variabile che sta nel campo d'azione di un quantificatore. Altrimenti la variabile si dice *libera*.

**Esercizio 7.** Nelle formule seguenti, dire quale variabili sono libere e quali vincolate

1. $P(x, y)$
2. $\forall y P(x, y)$
3. $\exists x \forall y P(x, y)$

Osservate che una stessa variabile può anche comparire libera in alcune occorrenze e vincolata in altre. Per esempio, nella formula seguente la prima occorrenza della variabile $y$ è libera, mentre la seconda è vincolata.

$$\forall x[P(x) \wedge Q(y)] \rightarrow \exists y Q(y)$$

**Definizione 3.2** (Formule chiuse)**.** Una f.b.f. senza variabili libere si dice *chiusa*.

**Esercizio 8.** Verificare che le Formule (1)-(6) sono chiuse.

**Esercizio 9.** Osservare che ogni f.b.f. chiusa è `T` o `F` in una data interpretazione.

# 4 Formule Valide vs Tautologie

Nella Sezione 1 abbiamo visto che ci sono delle formule che sono vere in ogni interpretazione

**Definizione 4.1.** (Formule valide) Una formula $\mathcal{F}$ vera in ogni interpretazione si dice *valida*.

Perchè non le chiamiamo *tautologie*, come nel caso della logica proposizionale? Perché vogliamo riservare il termine tautologie per un sottoinsieme delle formule valide. Per esempio, considerate la formula seguente

$$\forall x P(x) \vee \neg(\forall x P(x))$$

Questa formula del tipo $\mathcal{F} \vee \neg\mathcal{F}$, quindi chiaramente deve essere vera in ogni interpretazione. Nella logica del primo ordine si chiamano *tautologie* le formule che sono istanze di tautologie della logica proposizionale. Per esempio, la formula

$$\forall x P(x) \rightarrow (\exists x Q(x) \rightarrow \forall x P(x)) \tag{7}$$

Si ottiene dalla formula $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$ sostituendo $\forall x P(x)$ a $X$ e $\exists x Q(x)$. La formule (7) pertanto è una tautologia mentre, per esempio la (3), pur essendo valida, non è una tautologia.

Si noti che una tautologia è vera in ogni interpretazione *indipendentemente* dal significato che hanno i quantificatori, mentre una formula valida che non è una tautologia è vera in ogni interpretazione *per* il significato che hanno i quantificatori.

# 5 Interdipendenza dei quantificatori

I due quantificatori $\forall$ e $\exists$ non sono indipendenti, nel senso che si può "definire" uno in funzione dell'altro. Per esempio, la formula $\neg\exists x P(x)$ è equivalente[1] alla formula $\forall x \neg P(x)$. Infatti, data una qualunque interpretazione, la prima sta dicendo che "non esiste un elemento del dominio per cui vale la proprietà $P$", la seconda sta dicendo che "per ogni elemento del dominio non vale la proprietà $P$".

[1]Come nel caso della logica proposizionale, diciamo che due formule sono equivalenti se hanno lo stesso valore di verità in ogni interpretazione.

**Esercizio 10.** Sia $\mathcal{F}$ la formula seguente

$$\forall x\,[P(x) \lor Q(x)] \to \exists x\,[P(x) \land Q(x)]$$

1. Dare un'interpretazione in cui $\mathcal{F}$ è falsa;
2. Scrivere una formula equivalente a $\mathcal{F}$ senza usare il connettivo $\to$ e il quantificatore $\forall$;
3. Scrivere una formula equivalente a $\neg\mathcal{F}$ senza usare il connettivo $\to$ e il quantificatore $\exists$.

# 6 Conclusioni

In questo episodio abbiamo introdotto sintassi e semantica della logica del primo ordine, abbiamo osservato che ogni formula chiusa è `T` o `F` in una data interpretazione e abbiamo definito *valide* le formule che risultano `T` in ogni interpretazione.

Se vogliamo mostrare che una certa formula non è valida, ci basta dare un *controesempio*, ossia una interpretazione in cui è falsa. E se vogliamo mostrare che è valida? Non possiamo certo elencare tutte le possibili interpretazioni (come in una tabella di verità per una formula della logica proposizionale), perché le possibili interpretazioni di una formula della logica del primo ordine sono infinite! Nel prossimo episodio vedremo che invece il metodo dei *tableaux*, che abbiamo introdotto per la logica proposizionale, può essere facilmente esteso anche alla logica del primo ordine per dimostrare che una data formula è valida.