Matteo Di Gioacchino

Soluzioni Esercitazione 18/11/2024

PER QUALSIASI DUBBIO, PROBLEMA O SE PENSATE DI AVER TROVATO UN ERRORE NELLE SOLUZIONI, SCRIVETEMI QUANDO VOLETE

1)

F(x) := l'abitante x è un fumatore

1.1) "Se io sono un fumatore, allora siamo tutti fumatori";

Sia "x" l'abitante che ha fatto questa affermazione, possiamo riscriverla come:

$$F(x) \rightarrow \forall y F(y)$$

Se tutti gli abitanti sono di tipo True, ossia tutti dicono la verità, allora l'affermazione è sempre vera, quindi:
- Se esiste un abitante che è un fumatore, allora sono tutti fumatori e l'affermazione è T
- Se non esiste nessun fumatore, allora l'affermazione è comunque T (perché F -> F => T)

Non possiamo quindi dedurre se tutti gli abitanti siano o meno fumatori, perché l'affermazione è sempre vera

Se tutti gli abitanti sono di tipo False, ossia tutti dicono il falso, allora l'affermazione deve essere falsa, abbiamo quindi bisogno di un'implicazione del tipo T -> F
Per avere ciò, deve esistere almeno un abitante che è un fumatore, ma non tutti lo sono.

1.2) "Se qualcuno è un fumatore, allora io sono un fumatore";

Sia "x" l'abitante che ha fatto questa affermazione, possiamo riscriverla come:

$$\exists y F(y) \rightarrow F(x)$$

Se tutti gli abitanti sono di tipo True, allora l'affermazione è sempre vera, di conseguenza:
- Se esiste un abitante che è un fumatore, allora sono tutti fumatori.
- Se nessun abitante è un fumatore, l'affermazione è comunque vera.

Come prima, non possiamo ben distinguere se tutti gli abitanti siano fumatori, o lo sono tutti, o non lo è nessuno

Se tutti gli abitanti sono di tipo False, allora l'affermazione deve essere falsa, per esserlo, abbiamo bisogno che l'implicazione sia T -> F
Per essere tale, ciò vuol dire che deve esistere ALMENO un abitante che sia un fumatore, ma che non tutti lo siano.

1.3) “Alcuni qui sono fumatori, ma non io”.

Sia "x" l'abitante che ha fatto questa affermazione, possiamo riscriverla come:

$$(\exists y F(y)) \land (\neg F(x))$$

Se tutti gli abitanti sono di tipo True, l'affermazione è impossibile, perché dovremmo avere che almeno un abitante è un fumatore, e che tutti non lo siano, un assurdo.

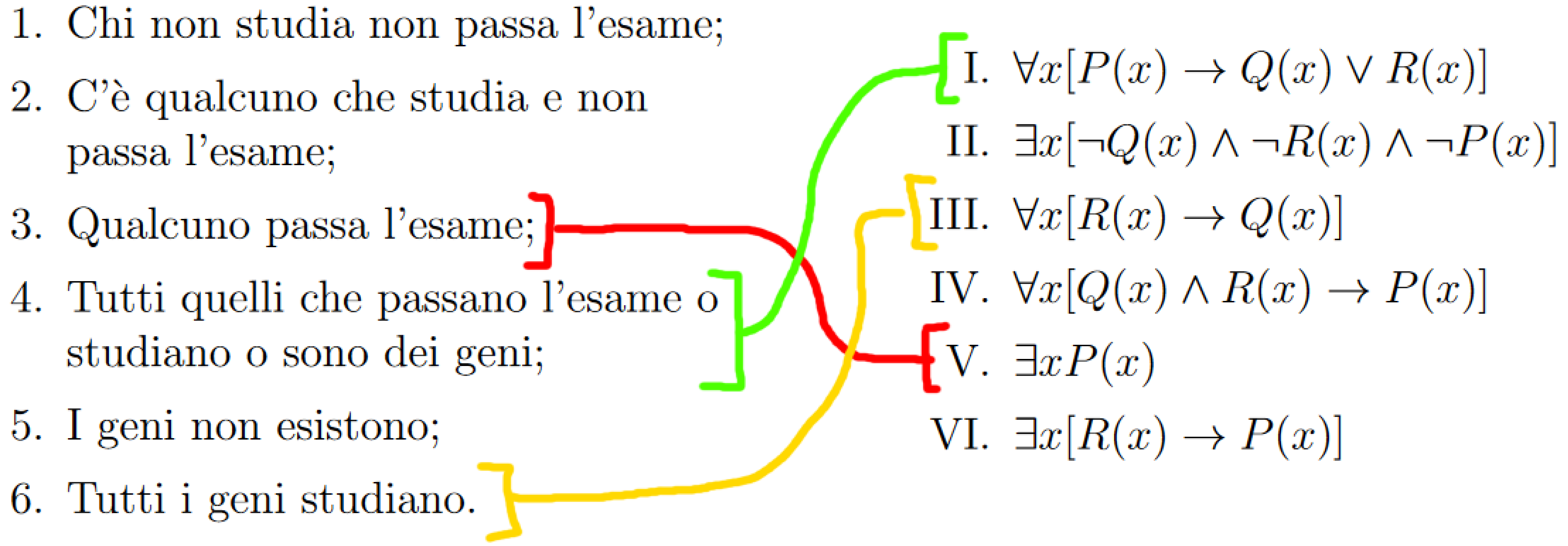
Se tutti gli abitanti sono di tipo False, riscriviamo la formula:

$$\neg[(\exists y F(y)) \land (\neg F(x))] \equiv \neg\exists y F(y) \lor \neg\neg F(x) \equiv$$

$$\equiv \forall y \neg F(y) \lor F(y)$$

Quindi o nessuno è un fumatore, o tutti lo sono.
Tuttavia, notiamo che il 1o caso è impossibile, perché gli abitanti affermano che "Alcuni qui sono fumatori", se nessuno lo fosse, l'affermazione non avrebbe senso.
L'unica possibilità rimasta è che siano tutti fumatori.

2) P(x) := "x passa l'esame" Q(x) := "x studia" R(x) := "x è un genio"



1. Chi non studia non passa l’esame;
2. C’è qualcuno che studia e non passa l’esame;
3. Qualcuno passa l’esame;
4. Tutti quelli che passano l’esame o studiano o sono dei geni;
5. I geni non esistono;
6. Tutti i geni studiano.

I. $\forall x[P(x) \to Q(x) \lor R(x)]$

II. $\exists x[\neg Q(x) \land \neg R(x) \land \neg P(x)]$

III. $\forall x[R(x) \to Q(x)]$

IV. $\forall x[Q(x) \land R(x) \to P(x)]$

V. $\exists x P(x)$

VI. $\exists x[R(x) \to P(x)]$

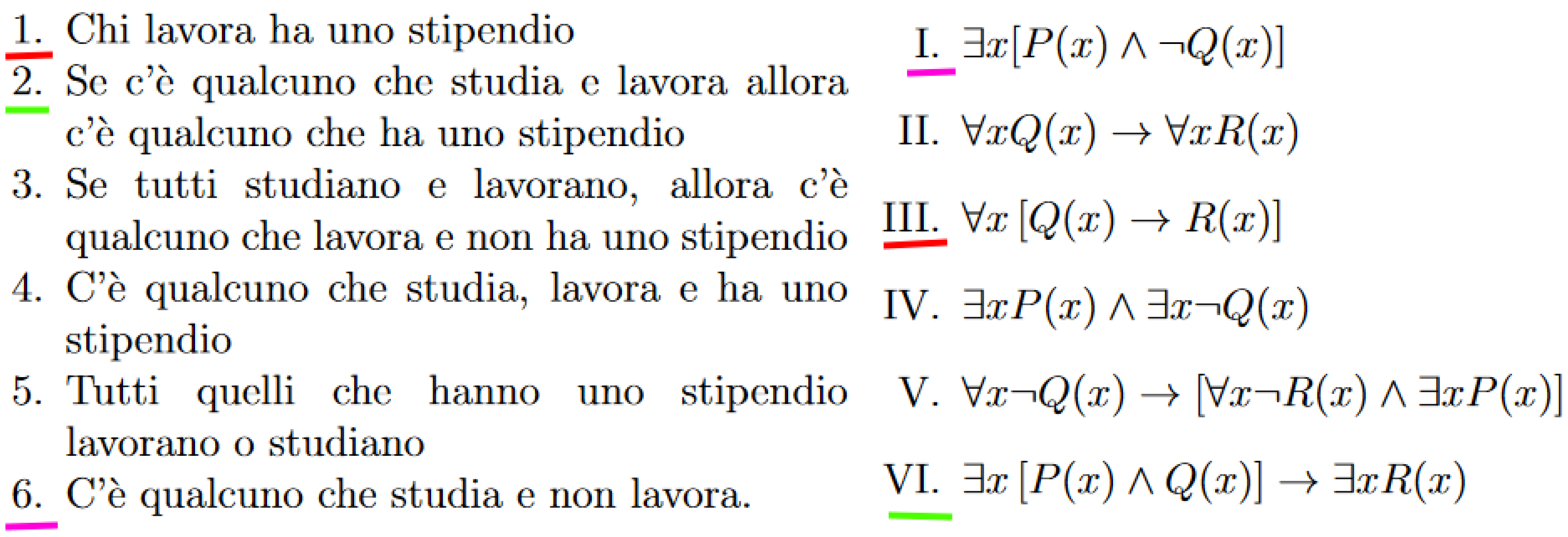
1. $\forall x[\neg Q(x) \to \neg P(x)]$

2. $\exists x[Q(x) \land \neg P(x)]$

3. $\forall x \neg R(x)$ o $\neg\exists x R(x)$

II. "Esiste qualcuno che non studia, non è un genio e non passa l’esame."
IV. "Chi studia ed è un genio allora passa l'esame"
VI. "Esiste qualcuno che è un genio, e quindi passa l'esame"

3) P(x) := "x studia" Q(x) := "x lavora" R(x) := "x ha uno stipendio"



1. Chi lavora ha uno stipendio
2. Se c’è qualcuno che studia e lavora allora c’è qualcuno che ha uno stipendio
3. Se tutti studiano e lavorano, allora c’è qualcuno che lavora e non ha uno stipendio
4. C’è qualcuno che studia, lavora e ha uno stipendio
5. Tutti quelli che hanno uno stipendio lavorano o studiano
6. C’è qualcuno che studia e non lavora.

I. $\exists x[P(x) \land \neg Q(x)]$
II. $\forall x Q(x) \to \forall x R(x)$
III. $\forall x\,[Q(x) \to R(x)]$
IV. $\exists x P(x) \land \exists x \neg Q(x)$
V. $\forall x \neg Q(x) \to [\forall x \neg R(x) \land \exists x P(x)]$
VI. $\exists x\,[P(x) \land Q(x)] \to \exists x R(x)$

Coppie: (1 - III), (2 - VI), (6 - I)

3. $\forall x\,[P(x) \land Q(x)] \to \exists x\,[Q(x) \land \neg R(x)]$

4. $\exists x\,[P(x) \land Q(x) \land R(x)]$

5. $\forall x\,[R(x) \to (Q(x) \lor P(x))]$

II. "Se tutti lavorano, allora tutti hanno uno stipendio"

IV. "Esiste qualcuno che studia e esiste qualcuno che non lavora"

V. "Se nessuno lavora, allora nessuno ha uno stipendio ed esiste qualcuno che studia"

4)

$$\exists x P(x) \land \exists x Q(x) \to \forall x \, [P(x) \lor Q(x)]$$

4.1) Dominio: Numeri Naturali
P(x) := "x è minore di 5" Q(x) := "x è maggiore di 10"

Per rendere falsa l'affermazione, dobbiamo rendere l'implicazione del tipo T -> F
Chiaramente, esistono numeri naturali che sono minori di 5 o maggiori di 10, ma esiste un numero naturale che è sia minore di 5 che maggiore di 10? Chiaramente è impossibile.

4.2) Ricordiamo che (X -> Y) == (!A || Y)

Per rimuovere il quantificatore esistenziale, osservate che l'affermazione "esiste un x tale per cui P(x) è vera" è equivalente a dire "non è vero che per ogni x si ha che P(x) non è vera", quindi:

$$\neg\left[\left(\neg\forall x \neg P(x)\right) \land \left(\neg\forall x \neg Q(x)\right) \right] \lor \forall x \left[P(x) \lor Q(x) \right]$$

Potete provare a sviluppare ulteriormente questa formula per renderla più compatta

4.3)
$$\neg\left[\exists x P(x) \land \exists x Q(x) \to \forall x \, [P(x) \lor Q(x)] \right] \equiv$$

$$\equiv \neg\left[\neg\left(\exists x P(x) \land \exists x Q(x)\right) \lor \left(\neg\exists x \neg\left[P(x) \lor Q(x)\right]\right) \right]$$

Se ci ragionate, dire che "per ogni x vale P(x)" è equivalente a dire "non è vero che esiste un x per il quale P(x) non è vera". Anche qui potete provare a rendere ancora più compatta la formula

5)

UNIVERSALI

$$\frac{\gamma}{\gamma(a)}$$

dove a è
un parametro
qualunque

ESISTENZIALI

$$\frac{\delta}{\delta(a)}$$

dove a è
un parametro
mai usato prima

γ	$\gamma(a)$
$\forall x P(x)$	$P(a)$
$\neg\exists x P(x)$	$\neg P(a)$

δ	$\delta(a)$
$\exists x P(x)$	$P(a)$
$\neg\forall x P(x)$	$\neg P(a)$

5.1) $\neg[(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \to \forall x [P(x) \vee Q(x)]]$ (1)

$(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$ (2) [ob (1)]

$\neg \forall x [P(x) \vee Q(x)]$ (3) [ob (1)]

$\neg [P(a) \vee Q(a)]$ (4) [ob (3)]

$\underline{\neg P(a)}$ (5) [ob (4)]

$\underline{\neg Q(a)}$ (6) [ob (4)]

$\forall x P(x)$ (7)

$\underline{P(a)}$ (9)

ℓ

$\forall x Q(x)$ (8) [ob (2)]

$\underline{Q(a)}$ (10)

ℓ

5.2) $\neg [\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)]$ (1)

$\neg(A \leftrightarrow B)$
$\equiv$
$(\neg A \wedge B) \vee (\neg B \vee A)$

$\forall x \forall y P(x,y)$ (2)

$\neg \forall y \forall x P(x,y)$ (3)

$\neg \forall x P(x,b)$ (4)

$\underline{\neg P(a,b)}$ (5)

$\forall y P(a,y)$ (6)

$\underline{P(a,b)}$ (7)

ℓ

$\neg \forall x \forall y P(x,y)$ (4)

$\forall y \forall x P(x,y)$ (5) [ob (1)]

$\neg \forall y P(c,y)$ (8) [ob (4)]

$\underline{\neg P(c,d)}$ (9) [ob (8)]

$\forall x P(x,d)$ (10) [ob (5)]

$\underline{P(c,d)}$ (11) [ob (10)]

ℓ

5.3) $\neg[\forall x P(x) \to [\exists x Q(x) \to \forall x P(x)]]$ (1)

$\forall x P(x)$ (2) [ob (1)]

$\neg[\exists x Q(x) \to \forall x P(x)]$ (3) [ob (1)]

$\exists x Q(x)$ (4) [ob (3)]

$\neg\forall x P(x)$ (5) [ob (3)]

$\underline{\neg P(a)}$ (6) [ob (5)]

$\underset{\ell}{\underline{P(a)}}$ (7) [ob (2)]

5.4) $\neg[\exists y \forall x P(x,y) \to \forall x \exists y P(x,y)]$ (1)

$\exists y \forall x P(x,y)$ (2) [ob (1)]

$\neg\forall x \exists y P(x,y)$ (3) [ob (1)]

$\forall x P(x,b)$ (4) [ob (2)]

$\neg\exists y P(a,y)$ (5) [ob (3)]

$\underline{P(a,b)}$ (6) [ob (4)]

$\underset{\ell}{\underline{\neg P(a,b)}}$ (7) [ob (5)]

6) Ricordiamo che nella Logica del primo Ordine si chiamano tautologie le formule che sono istanze di tautologie della logica proposizionale, non ci basta quindi dimstrare che sia valida con il metodo dei Tableaux.

6.1) $X := \forall x\, P(x) \qquad Y := \forall x\, Q(x)$

$Z := \forall x\, [P(x) \vee Q(x)]$

$X \vee Y \to Z$ non è tautologia (ex: X := T, Y := F, Z := F)

6.2) $X := \forall x \forall y\, P(x, y) \qquad Y := \forall y \forall x\, P(x, y)$

$X \equiv Y$ nella logica proposizionale NON è una Tautologia.

6.3) Vi rimando a pag. 5 dell'ep07 degli appunti del Professore, osservate che possiamo riscrivere la formula come:

$\forall x\, P(x) := X \qquad \exists x\, Q(x) := Y \qquad X \to (Y \to X)$

Che nella logica proposizionale...

$\neg(X \to (Y \to X))$ (1)

$\underline{X}$ (2) ... è tautologia.

$\neg(Y \to X)$ (3)

Y

$\underline{\neg X}$

ℓ

6.4) $X := \exists y \forall x P(x, y)$ $Y := \forall x \exists y P(x, y)$

$X \to Y$ Non è una tautologia

7)

7.1) Dominio := numeri naturali
P(x) := "x < 0"   Q(x) := "x >= 0"

Il lato Sx di F è sempre vero perché Q(x) è sempre vero, mentre:

$\exists x P(x)$ e' sempre FALSO, non esiste alcun numero naturale minore di 0.

Il lato Dx di F è quindi sempre falso.
F diventa quindi del tipo: T -> F, che è False

7.2) $\neg[\forall x[P(x) \vee Q(x)] \to (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))]$ (1)

$\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ (2)

$\neg[\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)]$ (3)

$P(a) \vee Q(a)$ (4) [ob (2)]

	$\underline{P(a)}$ (5)	$\underline{Q(a)}$ (6)	[ob (4)]
[ob (3)]	$\neg \exists x P(x)$ (7)	$\neg \exists x P(x)$	(7)
	$\neg \exists x Q(x)$ (8)	$\neg \exists x Q(x)$	(8)
[ob (7)]	$\underline{\neg P(a)}$ (9)	$\underline{\neg Q(a)}$	(10) [ob (8)]
	ℓ	ℓ	

8)

8.1) Dominio := numeri naturali
P(x) := "x > 4"
Il fatto che esista un x in N tale per cui x > 4 non implica che ogni x in N lo sia, la formula non è valida.

8.2) Vi rimando a pag. 4/5 dell'ep08 e a pag. 3/4 dell'ep09

$\neg\exists_x[P(x)\to\forall_y P(y)]$ (1)

a $\neg[P(a)\to\forall_y P(y)]$ (2) [ob (1)]
$\neg\exists_x[P(x)\to\forall_y P(y)]$ (3)

$P(a)$ (4) [ob (2)]
$\neg\forall_y P(y)$ (5)

b $\neg[P(b)\to\forall_y P(y)]$ (6) [ob (3)]
$\neg\exists_x[P(x)\to\forall_y P(y)]$ (7)

c $\underline{\neg P(c)}$ (8) [ob (5)]

$P(b)$ (9) [ob (6)]
$\neg\forall_y P(y)$ (10)

c $\neg[P(c)\to\forall_y P(y)]$ (11) [ob (7)]
$\neg\exists_x[P(x)\to\forall_y P(y)]$ (12)

d $\neg P(d)$ (13) [ob (10)]

$\neg\forall_y P(y)$ (14) [ob (11)]
$\underset{e}{\underline{P(c)}}$ (15)

8.3) Dominio := numeri naturali
P(x) := "x è pari" Q(x) := "x è dispari"
Il lato Sx dell'implicazione è sempre T, mentre il lato Dx è sempre F
La formula è quindi non valida

8.4) Dominio := numeri naturali   P(x,y) := "x è uguale a y"

- Per ogni x, P(x,x) è vera
- Non è vero che per ogni x e per ogni z, P(x,z) è vera, stessa cosa per P(x,y) e P(y,z)

Il lato Sx di F risulta essere quindi del tipo:

$$T \wedge [F \to (F \vee F)] \quad \Rightarrow \quad T$$

Il lato Dx invece è chiaramente sempre FALSO,
in questa interpretazione, F risulta essere quindi:

$T \to F \quad \Rightarrow \quad F$ la formula è quindi non valida.

8.5) $\neg[\forall x \exists y P(x,y) \wedge \exists x \forall y Q(x,y) \to \exists x \exists y [P(x,y) \wedge Q(x,y)]]$ (1)

$\forall x \exists y P(x,y) \wedge \exists x \forall y Q(x,y)$ (2)

$\neg \exists x \exists y [P(x,y) \wedge Q(x,y)]$ (3)

$\forall x \exists y P(x,y)$ (4) [ok (2)]

$\exists x \forall y Q(x,y)$ (5)

$\forall y Q(a,y)$ (6) [ok (5)]

$\exists y P(a,y)$ (7) [ok (4)]

$\underline{P(a,b)}$ (8) [ok (7)]

$\underline{Q(a,b)}$ (9) [ok (6)]

Qui ho saltato un passaggio $\neg[P(a,b) \wedge Q(a,b)]$ (10) [ok (3)]

$\underline{\neg P(a,b)}$ (11) $\underline{\neg Q(a,b)}$ (12) [ok (10)]

ℓ ℓ

8.6) $\neg[\exists_x \forall_y P(x,y) \land \exists_x \forall_y Q(x,y) \longrightarrow \forall_y(\exists_x P(x,y) \land \exists_x Q(x,y))]$ (1)

$$\exists_x \forall_y P(x,y) \land \exists_x \forall_y Q(x,y) \quad (2)$$

$$\neg \forall_y(\exists_x P(x,y) \land \exists_x Q(x,y)) \quad (3)$$

$$\exists_x \forall_y P(x,y) \quad (4)$$

$$\exists_x \forall_y Q(x,y) \quad (5) \quad [\text{da } (2)]$$

$$\forall_y P(a,y) \quad (6) \quad [\text{da } (4)]$$

$$\forall_y Q(b,y) \quad (7) \quad [\text{da } (5)]$$

$$\neg[\exists_x P(x,c) \land \exists_x Q(x,c)] \quad (8) \quad [\text{da } (3)]$$

$$\underline{P(a,c)} \quad (9) \quad [\text{da } (6)]$$

$$\underline{Q(b,c)} \quad (10) \quad [\text{da } (7)]$$

$$\neg \exists_x P(x,c) \ (11) \qquad \neg \exists_x Q(x,c) \ (12) \quad [\text{da } (10)]$$

$$\underset{\ell}{\underline{\neg P(a,c)}} \ (13) \qquad \underset{\ell}{\underline{\neg Q(b,c)}} \ (14)$$

9)

9.1) Dominio in entrambi i casi := numeri naturali

VERA: P(x,y) := "x = y"

Se P(x,y) è vera, allora anche P(y,x) è vera.
Se P(x,y) è falsa, ossia "x != y", allora anche P(y,x) lo è ("y != x")
Quest'interpretazione rende quindi la formula vera.

FALSA: P(x,y) := "x > y"

Se P(x,y) è vera, allora "x > y", ma chiaramente, P(y,x) ("y > x") sarà falsa
Quest'interpretazione rende quindi la formula falsa.

9.2) Dominio in entrambi i casi := numeri naturali

VERA: P(x,y) := "x < y" (chiaramente sempre vera, i numeri naturali sono infiniti)
FALSA: P(x,y) := "x > y" (per x = 0 è falsa, non esistono numeri naturali minori di 0)

9.3) Dominio in entrambi i casi := numeri naturali

VERA: P(x) := "x è pari" Q(x) := "x è dispari"
Chiaramente, esiste un x tale per cui vale P(x) and !Q(x), perché se x è pari, allora chiaramente non può essere dispari.
Allo stesso tempo, per ogni y, o vale P(y) o vale Q(y).
Quest'interpretazione rende quindi la formula vera.

FALSA: P(x) := "x è pari" Q(x) := "x > 7"
Non è vero che:

$\forall y [P(y) \lor Q(y)]$ per esempio, y = 3

Mentre chiaramente:

$\exists x [P(x) \land \neg Q(x)]$ per esempio, y = 2

Quest'interpretazione rende quindi la formula falsa.

10)

10.1) Dominio := numeri naturali
P(x,y) := "x < y"

$A: \forall x \exists y P(x,y)$

sempre vera perché i numeri naturali sono infiniti

$B: \exists y \forall x P(x,y)$

chiaramente falsa, esempio: se prendo "y = 3", non è vero che ogni numero naturale è minore di 3

$\{A = T, B = F\} \Rightarrow (T \to F) \equiv F \Rightarrow A \not\to B$

10.2) $\neg[\exists_y \forall_x P(x,y) \to \forall_x \exists_y P(x,y)]$ (1)

$\exists_y \forall_x P(x,y)$ (2)

$\neg \forall_x \exists_y P(x,y)$ (3)

$\forall_x P(x,b)$ (4) [da (2)]

$\neg \exists_y P(a,y)$ (5) [da (3)]

$\underline{\neg P(a,b)}$ (6) [da (5)]

$\underline{P(a,b)}$ (7) [da (4)]

ℓ

10.3) Ricordando che $A \equiv B$ può essere riscritta come $(A \to B) \wedge (B \to A)$

Abbiamo già visto che $A \not\to B$

Quindi $A \not\equiv B$

10.4) Chiaramente non corretta perché la 10.2) lo è.

11)

11.1) Dominio := numeri naturali

P(x,y) := "x < y"   Q(x,y) := "x > y"

Per ogni x esiste sempre un y tale per cui P(x,y), ma non è vero che per ogni x esiste un y tale per cui Q(x,y), per esempio, per x = 0, non esiste y in N tale per cui "0 > y".

A non è quindi una formula valida.

11.2) Dominio := numeri naturali

P(x,y) := "x = y"   Q(x,y) := "x != y"

Chiaramente, per ogni x esiste un y tale per cui x = y, basta prendere y uguale ad x. Stesso ragionamento per Q(x,y), per ogni x esiste sempre un y tale per cui x è diverso da y.

11.3) Il punto 11.2) ci dovrebbe dare un'intuizione:

Dominio := numeri naturali

P(x,y) := "x = y"   Q(x,y) := "x != y"

A può essere soddisfatta, come avevamo visto.

B invece no. Non è vero per ogni x esiste un y tale per cui valgono sia "x = y" e "x != y"

$$\{A = T, B = F\} \Rightarrow (T \to F) \equiv F \Rightarrow A \nrightarrow B$$

11.4) $\neg[\forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(x,y)) \to \forall x (\exists y P(x,y) \wedge \exists y Q(x,y))]$ (1)

$\forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(x,y))$ (2)

$\neg \forall x (\exists y P(x,y) \wedge \exists y Q(x,y))$ (3)

$\neg(\exists y P(a,y) \wedge \exists y Q(x,y))$ (4) [da (3)]

$\exists y (P(a,y) \wedge Q(a,y))$ (5) [da (2)]

$P(a,b) \wedge Q(a,b)$ (6) [da (5)]

$\underline{P(a,b)}$ (7) [da (6)]

$\underline{Q(a,b)}$ (8)

$\neg \exists y P(a,y)$ (9) $\neg \exists y Q(a,y)$ (10) [da (8)]

$\underset{\ell}{\underline{\neg P(a,b)}}$ (11) $\underset{\ell}{\underline{\neg Q(a,b)}}$ (12)