Matteo Di Gioacchino
Soluzioni Esercitazione 04/11/2024

PER QUALSIASI DUBBIO, PROBLEMA O SE PENSATE DI AVER TROVATO UN ERRORE NELLE SOLUZIONI, SCRIVETEMI QUANDO VOLETE

α	α_1	α_2
$X \wedge Y$	X	Y
$\neg(X \vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$\neg(X \to Y)$	X	$\neg Y$

β	β_1	β_2
$X \vee Y$	X	Y
$\neg(X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$X \to Y$	$\neg X$	Y

QUESTA TABELLA PER LE ALPHA & BETA FORMULE CI SARA' MOLTO UTILE IN QUESTE SOLUZIONI, E' MEGLIO QUINDI CHE CE LA "APPUNTIAMO" QUI VICINO

1)

1.1) $\neg[((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)]$ (1)

$((p \to q) \wedge (q \to r))$ (2) [da (1)]

$\neg(p \to r)$ (3) [da (1)]

$(p \to q)$ (4) [da (2)]

$(q \to r)$ (5) [da (2)]

p (6) [da (3)]

$\neg r$ (7) [da (3)]

$\neg p$ (8) | q (9) [da (4)]

$\neg q$ (10) | r (11) [da (5)]

$\neg F$ non è soddisfacibile $\to$ F è tautologia

1.2) $\neg[((p \to r) \land (q \to r)) \to ((p \lor q) \to r)]$ (1)

$((p \to r) \land (q \to r))$ (2) [ob (1)]

$\neg((p \lor q) \to r)$ (3) [ob (1)]

$(p \to r)$ (4) [ob (2)]

$(q \to r)$ (5) [ob (2)]

$(p \lor q)$ (6) [ob (3)]

$\neg r$ (7) [ob (3)]

$\neg p$ (8) — r (9) [ob (4)] ℓ

$\neg q$ (10) — r (11) [ob (5)] ℓ

p (12) ℓ — q (13) ℓ [ob (6)]

NOTA: gli altri due esercizi sono pressoché identici, eviterò quindi di scrivere le soluzioni, per ogni dubbio sono a vostra disposizione.
vi ricordo che se volete capire se state proseguendo bene o meno c'è sempre il Tool online consigliatovi dal Professore sui suoi appunti

$\neg F$ non è soddisfacibile $\to$ F è tautologia

2)

2.1) $\neg[((p \to q) \land (q \to \neg p)) \to \neg p]$ (1)

$((p \to q) \land (q \to \neg p))$ (2) [ob (1)]

p $\{\neg(\neg p)\}$ (3) [ob (1)]

$(p \to q)$ (4) [ob (2)]

$(q \to \neg p)$ (5) [ob (2)]

$\neg p$ (6) ℓ — q (7) [ob (4)]

$\neg q$ (8) ℓ — $\neg p$ (9) ℓ [ob (5)]

TAUTOLOGIA

2.2) $\neg[(((p \vee q) \to r) \wedge (p \to (q \vee r))) \to (p \to r)]$ (1)

$(((p \vee q) \to r) \wedge (p \to (q \vee r)))$ (2) [da (1)]

$\neg(p \to r)$ (3) [da (1)]

$((p \vee q) \to r)$ (4) [da (2)]

$(p \to (q \vee r))$ (5) [da (2)]

p (6) [da (3)]

$\neg r$ (7) [da (3)]

Nota: non c'è stato bisogno di sviluppare tutto il tableaux per chiuderlo. Quando svolgete gli esercizi, provate quindi a trovare un modo "furbo" di scegliere quale formula sviluppare per prima per chiudere il tableaux il prima possibile

- $\neg(p \vee q)$ (8)
  - $\neg q$ (10)
  - $\neg p$ (11) [da (8)]
- r (9) [da (4)]

TAUTOLOGIA

2.3) $\neg[((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \to (p \vee (q \wedge r))]$ (1)

$((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r))$ (2) [da (1)]

$\neg(p \vee (q \wedge r))$ (3) [da (1)]

$(\neg p \vee q)$ (4) [da (2)]

$(\neg p \vee r)$ (5) [da (2)]

$\neg(q \wedge r)$ (6) [da (3)]

$\neg p$ (7) [da (3)]

- $\neg q$ (8)
  - $\neg p$ (10)
    - $\neg p$ (12)
    - r (13)
  - (11) q
- $\neg r$ (9) [da (6)]
  - $\neg p$ (10)
    - (12) $\neg p$
    - r (13)
  - q (11) [da (4)]
    - $\neg p$ (12)
    - r (13) [da (5)]

p	q	r	$(((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \to (p \vee (q \wedge r)))$
F	F	F	F
F	F	T	F
F	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	T
T	F	T	T
T	T	F	T

3)

OSS: se per dimostrare che F è una tautologia dimostriamo che !F è una contraddizione, allora per dimostrare che F è una contraddizione ci basta prendere F SENZA negarla e applicare il metodo dei tableaux

3.1) $p \to \neg p$ (1)

$\neg p$ (2) $\quad \neg p$ (3)

Il tableaux non si chiude, quindi F NON può essere una contraddizione

Infatti, $\neg p$ rende vera F (ma p la rende falsa)

3.2) $((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge \neg(p \vee r)$ (1)

$((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r))$ (2)

$\neg(p \vee r)$ (3)

$\neg p$ (4)

$\neg r$ (5)

$(p \wedge q)$ (6) $\quad (\neg q \wedge r)$ (7)

q (7) $\quad \neg q$ (10)

p (8) $\quad r$ (11)

$\times \quad \times$

Tutti i rami si chiudono, e quindi F è una CONTRADDIZIONE

3.3) $((p \to q) \wedge (q \to \neg p)) \to p$ (1)

$\neg((p \to q) \wedge (q \to \neg p))$ (2) $\quad p$ (3)

Un ramo non si chiude, potremmo già fermarci qui, ma proseguiamo per completezza

$\neg(p \to q)$ (4) $\quad \neg(q \to \neg p)$ (5)

p (6) $\quad q$ (8)

$\neg q$ (7) $\quad p$ (9)

Non riusciamo a chiudere nessun ramo, quindi sicuramente F NON E' UNA CONTRADDIZIONE (infatti $p, \neg q$ o p, q rendono vera F)

Potrebbe essere una TAUTOLOGIA? Proviamo facendo il tableaux di $\neg F$

$\neg[((p \to q) \wedge (q \to \neg p)) \to p]$ (1)

$(p \to q) \wedge (q \to \neg p)$ (2)

$\neg p$ (3)

$(p \to q)$ (4)

$(q \to \neg p)$ (5)

$\Downarrow$

$\star$

$\star$

$\Downarrow$ [da (4)]

$\neg p$ (6) $\quad q$ (7)

$\neg q$ (8) $\quad p$ (9) $\quad \neg q$ (8) $\quad p$ (9)

$\times \quad \times$

Alcuni rami si chiudono, altri no quindi F non può essere una TAUTOLOGIA

4) Sappiamo che tutte le formule del 1o Esercizio sono Tautologie, quindi possiamo esprimerle come una formula in CNF formata da una singola clausola contenente tutti i letterali, sia asseriti che negati.

4.1.1) = 4.1.2) = 4.1.3) = $(p \lor \neg p \lor q \lor \neg q \lor r \lor \neg r)$

4.1.4) $(p \lor \neg p \lor q \lor \neg q)$ Potremmo anche prendere una formula composta da tutti i letterali asseriti e un singolo letterale extra negato, Ex: (p v q v r v !p), perché?

Del 2o Esercizio, la 1a e la 2a formula erano Tautologie, quindi il procedimento sarebbe lo stesso, per quanto riguarda la 3a, non era una Tautologia, quindi possiamo usare il classico procedimento di scrivere la tabella di verità e individuare una formula in CNF dalle "righe" che mostrano un'assegnazione di verità corrispondente ad un False, vi risparmio questo passaggio...

4.2.1) $(p \lor \neg p \lor q \lor \neg q)$ 4.2.2) $(p \lor \neg p \lor q \lor \neg q \lor r \lor \neg r)$

4.2.3) $(p \lor q \lor r) \land (p \lor q \lor \neg r) \land (p \lor \neg q \lor r)$

Del 3o Esercizio, sappiamo che la 2a formula è una contraddizione, quindi è equivalente a un numero di clausole pari a 2 volte il numero di letterali, una volta asseriti e una volta negati.
per quanto riguarda le altre, anche qui: tabella di verità => formula in CNF (per la 1a formula è facile)

4.3.1) $\neg p$ 4.3.2) $p \land \neg p \land q \land \neg q \land r \land \neg q$ 4.3.3) $(p \lor q) \land (p \lor \neg q) = p$

5) Abbiamo già parlato di questo procedimento, scriviamolo nel dettaglio:

a) Scriviamo la tabella di verità della nostra formula F

b) Individuiamo in quale riga della tabella di verità in cui F risulti FALSE

c) Per ogni riga in cui F risulti FALSE, creiamo una clausola contenente ogni letterale della formula negato rispetto a come appariva nella tabella di verità (se era asserito, lo neghiamo; se era negato, lo asseriamo, perché è come se negassimo una negazione). Dopodiché, uniamo in OR ogni letterale della clausola

d) Uniamo in AND ogni clausola

Ex:

A	B	A == B
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

CNF: (A || !B) && (!A || B)

6) X soddisfacibile <==> Y soddisfacibile

=>)

X soddisfacibile => per ogni clausola di X che contiene sia un letterale che il negato, se X è in CNF allora la clausola è sempre vera.
Il Passo 1 la rimuove, ma X rimane comunque soddisfacibile (se era soddisfacibile prima, allora anche eliminando clausole sempre vere rimane soddisfacibile). Per ogni clausola manipolata nel Passo 2, stiamo sostituendo clausole (per ipotesi soddisfacibili in X) con altre clausole equivalenti (e quindi soddisfacibili in Y).
Abbiamo così ottenuto Y, che è rimasta soddisfacibile.
=> Y soddisfacibile

<=)

Y soddisfacibile => ogni clausola rimossa da X al Passo 1 era sempre vera, rimuovendole, non abbiamo perso nulla riguardo la soddisfacibilità di X. Anche ogni clausola Z_i,j;x introdotta al Passo 2 è soddisfacibile, quindi entrambe le clausole originali D_i & D_j erano soddisfacibili => X soddisfacibile $\blacksquare$

7)

7.1.1) = 7.1.2) = 7.1.3) = 7.2.2)

$$(\underbrace{p \vee \neg p}_{1} \vee \underbrace{q \vee \neg q}_{1} \vee \underbrace{r \vee \neg r}_{1}) \Rightarrow (\ )$$

Clausola vuota

7.1.4) = 7.2.1)

$$(\underbrace{p \vee \neg p}_{1} \vee \underbrace{q \vee \neg q}_{1}) \Rightarrow (\ )$$

7.2.3)

$$\underbrace{(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)}_{2\,(r)} \wedge (p \vee \neg q \vee r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \text{ : } 2\,(q)$$

Nota: provate a dimostrare che le due formule sono equivalenti con il metodo dei Tableaux

Ricordate che:

$$(A \leftrightarrow B) == (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

7.3.1) $\neg p$ (non possiamo applicare nulla)

7.3.2) $\underbrace{p \wedge \neg p}_{1} \wedge \underbrace{q \wedge \neg q}_{1} \wedge \underbrace{r \wedge \neg q}_{1} \Rightarrow (\ ) \wedge (\ ) \wedge (\ ) \Rightarrow (\ )$

7.3.3) $\underbrace{(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)}_{2\,(q)} \Rightarrow p$

Otteniamo almeno una clausola vuota nei casi:

7.1.1 - 7.1.2 - 7.1.3 - 7.1.4 - 7.2.1 - 7.2.2 - 7.3.2

In ognuno di questi casi la formula di partenza era o una TAUTOLOGIA o una CONTRADDIZIONE

8)

8.1.1) = 8.1.2) = 8.1.3) = 8.2.2) $(p) \lor (\neg p) \lor (q) \lor (\neg q) \lor (r) \lor (\neg r)$

8.1.4) = 8.2.1) $(p) \lor (\neg p) \lor (q) \lor (\neg q)$

Nota: in questo caso non abbiamo una sola clausola con letterali legati da OR, ma tante clausole formate da un singolo letterale messe in OR tra loro

8.3.1) $\neg p$

8.3.2) $(p \land \neg p \land q \land \neg q \land r \land \neg q)$

Nota: stavolta invece non abbiamo tante clausole formate da singoli letterali e messe in AND, ma una singola clausola con tutti i letterali messi in AND

8.3.3) p

9) Proviamo a strutturarlo similmente all'Esercizio 5

a) Scriviamo la tabella di verità della Formula F
b) Individuiamo le righe in cui F è TRUE
c) Per ogni riga in cui F è TRUE, prendiamo i letterali, con la loro assegnazione originale, è mettiamoli in una singola clausola uniti tra loro dal connettivo AND.
d) Uniamo tutte le clausole con il connettivo OR.

A	B	A == B
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

CNF: (!A && !B) || (A && B)

10) Se ci pensate, quando una formula è una Contingenza, sviluppando il Tableaux di una formula SENZA NEGARLA, i rami che rimangono aperti ci dicono quali assegnazioni di verità rendono vere la formula, se per ognuno di questi rami costruiamo una clausola unendo i letterali in OR e unendo le clausole in AND, avremmo una formula in DNF , per convincervi di ciò, ridate un'occhiata ai tableaux dell'Esercizio 3

11) Sia $\mathcal{A}$ il sistema assiomatico definito dai seguenti schemi di assiomi

A1 : $X \to (Y \to X)$

A2 : $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$

A3 : $(\neg X \to Y) \to (\neg Y \to X)$

e dalla regola di inferenza *Modus Ponens*

$$\frac{X,\ X \to Y}{Y}.$$

A_1: $\neg(X \to (Y \to X))$ (1)

X (2)

$\neg(Y \to X)$ (3)

Y (4)

$\neg X$ (5)

A_2: $\neg((X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z)))$ (1)

$(X \to (Y \to Z))$ (2)

$\neg((X \to Y) \to (X \to Z))$ (3)

$(X \to Y)$ (4) [da (3)]

$\neg(X \to Z)$ (5) [da (3)]

X (6) [da (5)]

$\neg Z$ (7) [da (5)]

$\neg X$ (8) | Y (9) [da (4)]

$\neg X$ (10) | $(Y \to Z)$ (11) [da (2)]

$\neg Y$ (12) | Z (13) [da (11)]

A_3: $\neg((\neg X \to Y) \to (\neg Y \to X))$ (1)

$(\neg X \to Y)$ (2)

$\neg(\neg Y \to X)$ (3)

$\underline{\neg Y}$ (4) [da (3)]

$\underline{\neg X}$ (5) [da (3)]

$(\neg(\neg X))$ $\underset{\ell}{\underline{X}}$ (6) $\quad$ $\underset{\ell}{\underline{\neg Y}}$ (7) [da (2)]

12)

12.1) $\vdash p \to p$

(1) $(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$

[A_2 con $X = Z = p$, $Y = (p \to p)$]

(2) $(p \to ((p \to p) \to p))$ [A_1 con $X = p$, $Y = (p \to p)$]

(3) $(p \to (p \to p)) \to (p \to p)$ [(1), (2), MP]

(4) $(p \to (p \to p))$ [A_1 con $X = Y = Z = p$]

(5) $p \to p$ [(3), (4), MP]

12.2) $\vdash \neg\neg p \to p$

(1) $(\neg p \to \neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ [A_3 con $X = p$, $Y = \neg p$]

L'ESERCIZIO 12.1 CI DICE CHE NEL SISTEMA ASSIOMATICO "A" E' POSSIBILE OTTENERE UNA FORMULA DEL TIPO:

$X \to X$ [☆]

(2) $\neg p \to \neg p$ [☆ con $X = \neg p$]

(3) $\neg\neg p \to p$ [(1), (2), MP]

13) Lo lascio a voi, non è diverso da tutte le altre dimostrazioni di Tautologie che abbiamo visto finora

14) Sia $\mathcal{B}$ il sistema assiomatico definito dai seguenti schemi di assiomi

B1 : $(X \wedge Y) \rightarrow X$ **B3** : $((X \wedge Y) \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow (Y \rightarrow Z))$

B2 : $(X \wedge Y) \rightarrow Y$ **B4** : $((X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow (Y \rightarrow Z))) \rightarrow (X \rightarrow Z)$

14.1) $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow q)$

(1) $(p \wedge q) \rightarrow q$ [B_2 con $X = p, Y = q$]

(2) $((p \wedge q) \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow q))$ [B_3 con $X = p$, $Y = Z = q$]

(3) $p \rightarrow (q \rightarrow q)$ [(1), (2), MP]

14.2) $\underbrace{\{p \wedge q \rightarrow r\}}_{\text{IPOTESI 1}} \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

(1) $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ [B_3 con $X = p$, $Y = q$, $Z = r$]

(2) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ [IPO. 1, (1), MP]

14.3) $\{p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r)\} \vdash p \rightarrow r$

(1) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow (p \rightarrow r)$
[B_4 con $X = p$, $Y = q$, $Z = r$]

(2) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$ [(1), Sugg]

(3) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ [(2), IPO 1]

(4) $p \rightarrow r$ [(3), IPO 2]

14.4)
(1) $(p \wedge q) \rightarrow p$ [B_1 con $X = p, Y = q$]

(2) $((p \wedge q) \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow p))$ [B_3 con $X = Z = p$, $Y = q$]

(3) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ [(1), (2), MP]

14.5) $\{p \to q,\ q \to r\} \vdash p \to r$

(1) $(q \to r) \to (p \to (q \to r))$ [Sugg con $X = q \to r$, $Y = p$]

(2) $(p \to (q \to r))$ [(1), IPO. 2, MP]

(3) $((\underbrace{p \to q}_{X'}) \wedge (\underbrace{p \to (q \to r)}_{Y'})) \to (\underbrace{p \to r}_{Z'})$

[B4 con $X = p$, $Y = q$, $Z = r$]

(4) $(\underbrace{p \to q}_{X'}) \to ((\underbrace{p \to (q \to r)}_{Y'}) \to (\underbrace{p \to r}_{Z'}))$ [(3), Sugg 14.3]

(5) $(p \to (q \to r)) \to (p \to r)$ [(4), IPO 1, MP]

(6) $p \to r$ [(5), (2), MP]

15)

15.1) Osservando B1 & B2, notiamo che, senza ulteriori ipotesi, non possiamo ottenere una formula del tipo:

$$(p \wedge p) \to q$$

Se ci riuscissimo, potremmo usare B3 con $X = Y = p$ $Z = q$

$$((p \wedge p) \to q) \to (p \to (p \to q))$$

15.2)

Senza ulteriori ipotesi, dovremmo avere una formula di questo tipo:

$$((p \wedge (p \to q) \to Y) \wedge ((p \wedge (p \to q)) \to (Y \to q))) \to ((p \wedge (p \to q)) \to q)$$

[B4 con $X = (p \wedge (p \to q))$, $Y = ?$]

Possiamo ottenere i due membri in AND a sinistra?

Non sembrerebbe essere possibile averli in AND, singolarmente si con delle specifiche assegnazioni di verità a B1 e B2, ma in AND non sembrerebbe possibile.

15.3) Anche qui, ad occhio non mi sembra ottenibile come teorema nel sistema assiomatico B.
Però proviamo:

Non essendo ottenibile direttamente tramite assegnazioni a B1, B2, B3 & B4, l'unica opzione che ci rimane e ottenerla tramite Modus Ponens

In teoria, potremmo pensare che possa essere ottenibile da B4:

$((X \to Y) \wedge (X \to (Y \to Z))) \to (X \to Z)$

$$\Big(\big(\underbrace{((p\to r)\wedge(q\to r))}_{X}\to Y\big)\wedge\big(\underbrace{((p\to r)\wedge(q\to r))}_{X}\to (Y\to \underbrace{(r\to(p\wedge q))}_{Z})\big)\Big)$$

$$\longrightarrow \big(\underbrace{((p\to r)\wedge(q\to r))}_{X}\to \underbrace{(r\to(p\wedge q))}_{Z}\big)$$

Come per il caso precedente, possiamo ottenere i due membri in AND a sinistra?
Senza ulteriori ipotesi, sembrerebbe di no

In tutti e 3 i casi, gli assiomi di B non sembrano essere strutturati per essere in grado di dimostrare le 3 formule.

Nel caso troviate qualche errore in questo ragionamento, fatemelo sapere

16) Nei passi 2 & 3 di Resolution, prendiamo due clausole, diciamo D_i & D_j, dove entrambe contengono la stessa variabile, una volta asserita e una volta negata. A partire da queste clausole, deriviamo una 3a clausola, Z_i,j;x, del tutto equivalente all'unione delle due di prima MA SENZA LA CONTRADDIZIONE. Le clausole difatto diventano "obsolete" e possiamo cancellarle, concentrandoci solo su Z_i,j;x

Osserviamo ora come sono strutturate le due formule del Modus Ponens:

$$(1)\quad X \to Y \equiv \underbrace{\neg X \vee Y}_{A}$$

$$(2)\quad \underbrace{X}_{B}$$

E se applicassimo Resolutions su A & B ? Otteniamo una 3a clausola che contiene solo Y
le altre due possiamo cancellarle perché sono diventate "obsolete", ed ecco che il Modus Ponens diventa un caso particolare di Resolution

17) Questo è un esercizio Extra molto avanzato, di sicuro non sarà un esercizio da Esame; se avete idee su come risolverlo, fatemelo sapere e proveremo a risolverlo insieme.