

Matteo Di Gioacchino

Soluzioni Esercitazione 17/10/2024

PER QUALSIASI DUBBIO, PROBLEMA O
SE PENSATE DI AVER TROVATO UN ERRORE
NELLE SOLUZIONI, SCRIVETEMI QUANDO
VOLETE

$$1) f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{D}$$
$$f(n) = 2n + 1$$

a) INIETTIVA:

$$\forall x, x' \in \mathbb{N}, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Per costruzione della nostra funzione, questa proprietà è rispettata

b) SURIETTIVA:

$$\forall y \in \mathbb{D} \quad \exists x \in \mathbb{N} : f(x) = y$$

Anche questa proprietà è rispettata per costruzione

c) f è INIETTIVA e BIETTIVA $\Rightarrow f$ è BIUNIVOCA (o BIETTIVA)

2)

TEOREMA (FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA):

Ogni numero naturale $n \geq 1$ o è un numero primo o può essere scomposto in un prodotto tra due numeri primi

DEF (NUMERO COMPOSTO):

Un numero composto è un numero intero positivo che ha almeno un altro divisore oltre a 1 e se stesso

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE I NUMERI PRIMI NON SIANO INFINITI

Allora possiamo elencarli, siano: $p_1, p_2, \dots, p_n$ tutti i numeri primi

(in ordine non
decrescente, dal più
piccolo al più grande)

Scriviamo il numero composto: $X = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$

Adesso abbiamo 2 possibilità:

1) X è un numero primo $\Rightarrow$ abbiamo trovato un numero primo più grande più grande di p_n (quello che avevamo supposto essere il più grande) $\swarrow$ (assurdo)

2) X è un numero composto $\Rightarrow$ DEVE essere divisibile per qualche numero primo, ma siccome NESSUNO di quei numeri primi divide X , allora ne deve esistere un altro (p_{n+1}) che non è all'interno del nostro elenco iniziale.

$\swarrow$ (assurdo)

ABBIAMO TROVATO UNA CONTRADDIZIONE A CIO' CHE AVEVAMO SUPPOSTO

3)

DEF (NUMERO RAZIONALE):

Un numero razionale è un numero ottenibile come rapporto tra due numeri interi coprimi tra loro (nessun divisore comune se non +1 o -1)

SUPPONIAMO (PER ASSURDO) CHE $\sqrt{2}$ SIA UN NUMERO RAZIONALE:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad (n, m \neq 0) \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow 2m^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ è PARI} \Rightarrow n \text{ è PARI} \quad \begin{matrix} \text{(perché pari alla } 2a \\ \text{è pari, dispari alla } 2a \\ \text{è dispari)} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow m = 2k \Rightarrow m^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow 2m^2 = 4k^2 \Rightarrow m^2 = 2k^2 \Rightarrow m^2 \text{ è PARI} \Rightarrow m \text{ è PARI}$$

$$\Rightarrow \text{Sia } m \text{ che } n \text{ sono pari, chiaramente, NON sono coprimi tra loro} \quad \swarrow$$

ABBIAMO TROVATO UNA CONTRADDIZIONE A CIO' CHE AVEVAMO SUPPOSTO

2) X è un numero composto $\Rightarrow$ DEVE essere divisibile per qualche numero primo, ma siccome NESSUNO di quei numeri primi divide X , allora ne deve esistere un altro (p_{n+1}) che non è all'interno del nostro elenco iniziale.

$\swarrow$ (assurdo)

ABBIAMO TROVATO UNA CONTRADDIZIONE A CIO' CHE AVEVAMO SUPPOSTO

Matteo Di Gioacchino

Soluzioni Esercitazione 17/10/2024

PER QUALSIASI DUBBIO, PROBLEMA O
SE PENSATE DI AVER TROVATO UN ERRORE
NELLE SOLUZIONI, SCRIVETEMI QUANDO
VOLETE

4)

$$4.1.1) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 1$$

PASSO BASE: $n=1$

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(2)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} \quad \text{OK}$$

IPOTESI INDUTTIVA:

Suppongo vero fino a $n = m-1$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{(m-1)m}{2}$$

PASSO INDUTTIVO:

Dimostro per $n = m$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k &= \left(\sum_{k=1}^{m-1} k \right) + m = \frac{(m-1)m}{2} + m = \\ &= \frac{(m-1)m + 2m}{2} = \frac{m^2 + m}{2} = \frac{m(m+1)}{2} \end{aligned}$$

IPOTESI INDUTTIVA



QUESTO SIMBOLO VUOL DIRE
"FINE DIMOSTRAZIONE"
A VOLTE TROVERETE ANCHE "Q.E.D."

4.1.2) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \geq 1$

PASSO BASE: $n=1$

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(2)(3)}{6} = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

IPOTESI INDUTTIVA:

Suppongo vero fino a $n = m-1$

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^2 = \frac{(m-1)m[2(m-1)+1]}{6}$$

PASSO INDUTTIVO:

Dimostro per $n = m$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{m-1} k^2 \right) + m^2 = \frac{(m-1)m[2(m-1)+1]}{6} + m^2 = \\ &= \frac{(m-1)m[2(m-1)+1] + 6m^2}{6} = \frac{m[(m-1)(2m-1) + 6m]}{6} = \\ &= \frac{m[2m^2 - m - 2m + 1 + 6m]}{6} = \frac{m(2m^2 + 3m + 1)}{6} = \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.2)

$$n^3 - n \text{ DIVISIBILE PER } 3 \quad \forall n \geq 1$$

PASSO BASE: $n=1$

$$1^3 - 1 = 0 \quad \text{DIVISIBILE PER } 3 \quad \text{OK}$$

IPOTESI INDUTTIVA:

Suppongo che sia vero per $n = m$

$$m^3 - m = 3k \quad \text{DIVISIBILE PER } 3$$

PASSO INDUTTIVO:

Dimostro per $n = m+1$

$$\begin{aligned} (m+1)^3 - (m+1) &= (m^3 + 3m^2 + 3m + 1) - (m+1) = \\ &= m^3 + 3m^2 + 2m = \end{aligned}$$

$$= \underbrace{(m^3 - m)}_{\text{IPOTESI INDUTTIVA}} + 3 \underbrace{(m^2 + m)}_{\text{DIVISIBILE PER 3}}$$

IPOTESI INDUTTIVA
DIVISIBILE PER 3

DIVISIBILE PER 3

$$5) \sum_{k=1}^n (k+3)^2 = \sum_{k=1}^n (k^2 + 6k + 9) =$$

$$= \sum_{k=1}^n k^2 + 6 \sum_{k=1}^n k + 9 \sum_{k=1}^n 1 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \cancel{6}^3 \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + 9n =$$

ORA, VOLENDO POTREMMO LASCIARE TUTTO COSI',
MA PROVIAMO A RENDERE LA FORMULA UN PO' PIU' "COMPATTA":

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 18n(n+1) + 54n}{6}$$

6)

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1, \quad \text{per ogni } n \geq 1 \end{cases}$$

Facciamo qualche tentativo con $n=1, 2, 3, 4, \dots$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 2a_1 + 1 = 2 + 1 = 3 \quad a_3 = 2a_2 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 15 \quad a_5 = 2a_4 + 1 = 31$$

SEMBREREBBE CHE... $a_n = 2^n - 1$

DIMOSTRIAMO PER INDUZIONE:

PASSO BASE:

$$n=1$$

$$a_1 = 2^1 - 1 = 1 \quad \text{OK}$$

IPOTESI INDUTTIVA:

Suppongo vero fino a $n=k$

$$a_k = 2^k - 1$$

PASSO INDUTTIVO

DIMOSTRO PER $n=k+1$

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2 \cdot (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1 \quad \blacksquare$$

7)

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \quad \text{per ogni } n \geq 3 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $a_n \leq 2^n$ per ogni $n \geq 0$.

PASSO BASE:

$$n=0 \Rightarrow a_0 = 1 \leq 2^0 = 1 \quad \text{OK}$$

IPOTESI INDUTTIVA:

Suppongo vero fino a $n=k \Rightarrow a_k \leq 2^k$

PASSO INDUTTIVO:

Dimostro per $n=k+1$

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \underline{a_k} + \underline{a_{k-1}} + \underline{a_{k-2}} \leq 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} = 2^{k-2} (2^2 + 2^1 + 1) \\ &= 7 \cdot 2^{k-2} \stackrel{?}{\leq} 2^{k+1} \end{aligned}$$

CERTAMENTE! DIVIDIAMO "A DESTRA E A SINISTRA" PER 2^{k-2}

$$7 \cdot 2^{k-2} \leq 2^{k+1} \Rightarrow 7 \leq 2^{k+1-(k-2)} = 2^3 = 8$$

$$\Rightarrow 7 \leq 8 \Rightarrow a_{k+1} \leq 2^{k+1} \quad \blacksquare$$

$$8) \quad \begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{per } n \geq 3 \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

PASSO BASE: $n=1$

$$\prod_{i=1}^1 F_i^2 = F_1^2 = 1 = \overset{1}{F_1} \cdot \overset{1}{F_2} \quad \text{OK}$$

IPOTESI INDUTTIVA:

Suppongo vero fino a $n=k$

$$\prod_{i=1}^k F_i^2 = F_k F_{k+1}$$

PASSO INDUTTIVO:

Dimostro per $n=k+1$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{k+1} F_i^2 &= \prod_{i=1}^k F_i^2 + F_{k+1}^2 = F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1} (F_k + F_{k+1}) = \\ &= F_{k+1} F_{k+2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

NOTA:

VEDETE COME QUESTI ESERCIZI PER INDUZIONE HANNO QUASI SEMPRE LO STESSO "PATTERN?"

- PASSO BASE
- IPOTESI INDUTTIVA FINO A $n=k$
- PROVO A DIMOSTRARE PER $n=k+1$
 - MI TROVO CON UNA SOMMATORIA FINO A $k+1$, A QUESTO PUNTO LA SCOMPONGO IN:
UNA SOMMATORIA FINO A k + IL MEMBRO DELLA SOMMATORIA PER $k+1$
 - CALCOLI, CALCOLI... OTTENDO L'INDUZIONE

INIZIALMENTE PUO' SEMBRARE UN PO' OSTICO, MA FIDATEVI CHE ESERCITANDOVICI MOLTO QUESTE DIMOSTRAZIONI VI DIVENTERANNO QUASI NATURALI

9) **NOTA:** Scriveremo: $\wedge = \&\&$ $\vee = ||$ $\neg = !$ (punto esclamativo)

9.1)

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$(p \rightarrow q) (\neg p)$
F	F	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F
V	V	V	F	V

9.2)

p	q	r	$q \rightarrow p$	$\underbrace{(p \rightarrow (q \rightarrow p))}_A$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$\underbrace{((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))}_B$	$A \rightarrow B$
F	F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F	F
V	V	V	V	V	V	V	V	V

9.3)

p	q	$(p == q)$	$(p \rightarrow (p == q))$	$p q$	$\neg(p q)$	$(p \rightarrow (p == q)) \neg(p q)$
F	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F
V	V	V	V	V	F	V

9.4)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \&\& q)$	$(\neg p \&\& \neg q)$	$(p \&\& q) (\neg p \&\& \neg q)$
F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F
V	V	F	F	V	F	V

10.1) $A(x) := x \text{ è primo}$ $B(x) := x > 2$ $C(x) := x \text{ è dispari}$

$(A(x) \ \&\& \ B(x)) \rightarrow C(x)$

10.2) $A := \text{Fiorello va al cinema}$ $B := \text{proiettano una commedia}$

$A \rightarrow B$

Perché? Facciamo la tabella di verità:

Se Fiorello NON va al cinema, allora non ci interessa molto se proiettino o meno una commedia.

Se Fiorello va al cinema, allora per avere una formula proposizionale corretta deve per forza essere proiettata una commedia

A	B	$A \rightarrow B$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

10.3) $V := \text{Vino}$ $D := \text{Donne}$ $C := \text{Canti}$ $F := \text{Felice}$

$(V \ \&\& \ D \ \&\& \ C) \leftrightarrow F$

10.4) $A(s) := \text{Limitata}$ $B(s) := \text{Convergente}$

$B(s) \rightarrow A(s)$

11)

$$11.1) (p \ \&\& \ q \ \&\& \ r) \ || \ (p \ \&\& \ q \ \&\& \ !r) \ || \ (!p \ \&\& \ q \ \&\& \ r)$$

NOTA: QUELLO CHE HO FATTO E' STATO:

- VEDERE SU QUALE "RIGA" LA FORMULA ERA VERA
- PRESA UNA CERTA "RIGA" DOVE LA FORMULA ERA VERA, PORRE IN "AND" TUTTE LE VARIABILI CON LE CORRISPONDENTI ASSEGNAZIONI, FORMANDO QUELLA CHE SI CHIAMA "CLAUSOLA"
- PORRE IN "OR" TUTTE LE "CLAUSOLE"
- SE ALMENO UNA CLAUSOLA E' SODDISFATTA, ALLORA LA FORMULA E' VERA

$$11.2) (p \ \&\& \ q \ \&\& \ !r) \ || \ (p \ \&\& \ !q \ \&\& \ !r) \ || \ (!p \ \&\& \ q \ \&\& \ r) \ || \ (!p \ \&\& \ q \ \&\& \ !r)$$

12)

p	q	r	^A (p-->q)	^B (q-->r)	^C (A && B)	!p	^D (r == !p)	(C D)
F	F	F	V	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	F	F
V	V	F	V	F	F	F	V	V
V	V	V	V	V	V	F	F	V

DNF)

$$(!p \ \&\& \ !q \ \&\& \ !r) \ || \ (!p \ \&\& \ !q \ \&\& \ r) \ || \ (!p \ \&\& \ q \ \&\& \ r) \ || \\ (p \ \&\& \ !q \ \&\& \ !r) \ || \ (p \ \&\& \ q \ \&\& \ !r) \ || \ (p \ \&\& \ q \ \&\& \ r)$$

CNF)

$$(p \ || \ !q \ || \ r) \ \&\& \ (!p \ || \ q \ || \ !r)$$

13)

13.1)

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	$((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))$
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	V
V	V	V	V	V

CONTINGENZA

13.2)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg p \rightarrow \neg q)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V	V

CONTINGENZA

13.3)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg q \rightarrow \neg p)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V	V

TAUTOLOGIA

13.4)

p	$\neg p$	$(p \rightarrow \neg p)$
F	V	V
V	F	F

CONTINGENZA

13.5)

p	$\neg p$	$(p == \neg p)$
F	V	F
V	F	F

CONTRADDIZIONE

13.6)

p	q	!p	!q	(p == q)	(!p == !q)	(p == q) == (!p == !q)
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V

CONTINGENZA

13.7)

p	q	!p	!q	!(p && q)	(!p && !q)	!(p && q) == (!p && !q)
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	F	F	F	F	V

CONTINGENZA

13.8)

p	q	!p	!q	!(p && q)	(!p !q)	!(p && q) == (!p !q)
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V

TAUTOLOGIA

13.9)

p	q	!p	!q	(!p !q)	!(p q)	(!p !q) == !(p q)
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	F	F	F	F	V

CONTINGENZA

13.10)

p	q	!p	!q	!(p q)	(!p && !q)	!(p q) == (!p && !q)
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	F	F	V

TAUTOLOGIA

13.11)

p	q	$(p \ \&\& \ q)$	$(p \ \ q)$	$(p == A)$	$(q == B)$	$(C == D)$
F	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	V	V	V	V	V

TAUTOLOGIA

14)

NOTA: QUELLO CHE FARO' SARA' IMMAGINARE MENTALMENTE
COME SAREBBERO LE TABELLE DI VERITA' SE AL POSTO DI UNA
VARIABILE AVESSI SEMPRE "t" O "f"

14.1) $((t \rightarrow p) \ \&\& \ (q \ || \ f)) \rightarrow ((q \rightarrow f) \ || \ (r \rightarrow t)) \Rightarrow$
 $(p \ \&\& \ q) \rightarrow (!q \ || \ t) \Rightarrow$
 $(p \ \&\& \ q) \rightarrow t \Rightarrow t$

14.2) $(p \ || \ t) \rightarrow q \Rightarrow t \rightarrow q \Rightarrow q$

14.3) $!(p \ || \ t) == (f \rightarrow q) \Rightarrow f == t \Rightarrow f$

14.4) $(!(p \ || \ f) \ \&\& \ (q == t)) \rightarrow (r \ \&\& \ t) \Rightarrow$
 $(!p \ \&\& \ q) \rightarrow r$

15)

15.1)

AND)

A	B	$A \ \&\& \ B$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

->)

A	B	$A \rightarrow B$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

$(A \ \&\& \ B) == !(A \rightarrow !B)$

A	B	$!B$	$(A \rightarrow !B)$	$!(A \rightarrow !B)$
F	F	V	V	F
F	V	F	V	F
V	F	V	V	F
V	V	F	F	V

15.2)

==)	A	B	A == B	A	B	(A -> B)	(B -> A)	(A -> B) && (B -> A)
	F	F	T	F	F	T	T	T
	F	T	F	F	T	T	F	F
	T	F	F	T	F	F	T	F
	T	T	T	T	T	T	T	T

$$(A == B) == (A \rightarrow B) \&\& (B \rightarrow A)$$

15.3)

)	A	B	A B	A	B	A -> B	(A -> B) -> B
	F	F	F	F	F	T	F
	F	T	T	F	T	T	T
	T	F	T	T	F	F	T
	T	T	T	T	T	T	T

$$(A || B) == (A \rightarrow B) \rightarrow B$$

15.4) $(!A) == (A \rightarrow f)$

A	!A	A -> f
F	T	T
T	F	F

16)

$$(A \&\& B) == !(!A || !B)$$

16.1) $(A \rightarrow B) == (!A || B)$

$$(A == B) \Rightarrow (A \rightarrow B) \&\& (B \rightarrow A) \Rightarrow (!A || B) \&\& (!B || A) \Rightarrow !(! (!A || B) || ! (!B || A))$$

$$(A || B) == !(!A \&\& !B)$$

16.2) $(A \rightarrow B) == !(A \&\& !B)$

$$(A == B) \Rightarrow (A \rightarrow B) \&\& (B \rightarrow A) \Rightarrow !(A \&\& !B) \&\& !(B \&\& !A)$$

17)

NOTA: $\downarrow == \text{NOR}$ $| == \text{NAND}$

$$17.1) \quad !A == (A \text{ nor } A)$$

$$(A || B) == (A \text{ nor } B) \text{ nor } (A \text{ nor } B)$$

$$17.2) \quad !A == (A \text{ nand } A)$$

$$(A \&\& A) == (A \text{ nand } B) \text{ nand } (A \text{ nand } B)$$

18)

$$18.1) \quad a) (p \rightarrow !q) \Rightarrow \neg p!q$$

$$b) (p \rightarrow !q) || r \Rightarrow ||(\neg p!q)r$$

$$18.2) \quad a) (p || q) \Rightarrow ||pq$$

$$b) (!r \rightarrow p) \Rightarrow \neg !rp$$

$$c) (p || q) \&\& (!r \rightarrow p) \Rightarrow \&\&(||pq)(\neg !rp)$$

19)

$$19.1) \quad a) (p \rightarrow q) \Rightarrow \neg pq$$

$$b) (p \rightarrow q) || !p \Rightarrow ||(\neg pq)!p$$

$$19.2) \quad a) (q \rightarrow p) \Rightarrow \neg qp$$

$$b) (p \rightarrow (q \rightarrow p)) \Rightarrow \neg p(\neg qp)$$

$$c) ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \Rightarrow \neg(\neg pq)(\neg pr)$$

$$d) (p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \Rightarrow \neg(\neg p(\neg qp))(\neg(\neg pq)(\neg qr))$$

$$19.3) \quad a) (p \rightarrow (p == q)) \Rightarrow \neg p(==pq)$$

$$b) (p \rightarrow (p == q)) || !(p || q) \Rightarrow ||(\neg p(==pq))(!||pq)$$

$$19.4) \quad a) (p \&\& q) \Rightarrow \&\&pq$$

$$b) (!p \&\& !q) \Rightarrow \&\&!p!q$$

$$c) (p \&\& q) || (!p \&\& !q) \Rightarrow ||(\&\&pq)(\&\&!p!q)$$

20)

PASSO BASE:

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI $|F| = 1$ (NOTA: CON $|F|$ INDICO "LA LUNGHEZZA DI F")

- $\Rightarrow$) F è una f.b.f. in notazione polacca $\Rightarrow$ F è formata solo da 1 lettera
 $\Rightarrow$ ad ogni lettera associo il valore -1 $\Rightarrow$ Il valore associato a F è -1, somma simboli ≥ 0
- $\Leftarrow$) Il valore associato a F è -1, somma simboli ≥ 0 $\Rightarrow$ F è formata solo da 1 lettera
 $\Rightarrow$ F è una f.b.f. in notazione polacca

OK, PASSO BASE DIMOSTRATO

IPOTESI INDUTTIVA:

SUPPONGO LA PROPRIETÀ VERA FINO A $|F| = n$

PASSO INDUTTIVO:

PROVO A DIMOSTRARE PER $|F| = n+1$

- $\Rightarrow$) F è una f.b.f. in notazione polacca $\Rightarrow$ 2 casi: l'ultimo simbolo è O una NEGAZIONE
O un OPERATORE BINARIO

- 1) l'ultimo simbolo è una NEGAZIONE $\Rightarrow F = !F'$ $\Rightarrow |F'| = n$, vale l'IPO. IND.
 $\Rightarrow$ valore associato a F' è -1, somma simboli ≥ 0
 $\Rightarrow$ a ! associo il valore 0 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ valore associato a $F = !F'$ è -1, somma simboli ≥ 0 OK

- 2) l'ultimo simbolo è un OP. BIN. $\Rightarrow F = \$F'F''$ $\Rightarrow$ vale l'IPO. IND. sia su F' che su F''
NOTA: INDICO un qualsiasi OP.BIN. con \$ $\Rightarrow$ i valori associati sia a F' che F'' sono -1, somma simboli ≥ 0
 $\Rightarrow$ a \$ associo il valore 1 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ valore associato a $F = \$F'F''$ è $+1-1-1 = -1$, OK
 $\Rightarrow$ somma simboli ≥ 0 (se la somma dei simboli dei sottoseg. era $\geq$, allora chiaramente se le sommo e aggiungo 1 è ancora ≥ 0) OK

- $\Leftarrow$) F ha valore associato -1 e somma simboli ≥ 0 $\Rightarrow$ stessi 2 casi precedenti:

- 1) l'ultimo simbolo è una NEGAZIONE $\Rightarrow F = !F'$ $\Rightarrow |F'| = n$ $\Rightarrow$ vale IPO. IND. su F' $\Rightarrow$
 $\Rightarrow F'$ è f.b.f $\Rightarrow F = !F'$ è f.b.f. OK
- 2) l'ultimo simbolo è un OP. BIN. $\Rightarrow F = \$F'F''$ $\Rightarrow$ l'IPO.IND. vale sia su F' che su F'' $\Rightarrow$
 $\Rightarrow F'$ e F'' sono delle f.b.f. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ aggregate, il loro valore associato è -2, contando anche \$ è -1
 $\Rightarrow F = \$F'F''$ è f.b.f. OK

