

Logica e Reti Logiche

Esercitazione

Francesco Pasquale

18 marzo 2021

Esercizio 1. Dimostrare per induzione che

1. Per ogni $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

2. Per ogni $n \geq 1$, $n^3 - n$ è divisibile per 3

Nell'esercizio precedente abbiamo dimostrato che $\frac{n(n+1)}{2}$ è una espressione in forma chiusa della somma $\sum_{k=1}^n k$ e che $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ lo è della somma $\sum_{k=1}^n k^2$.

Esercizio 2. Trovare una espressione in forma chiusa di $\sum_{k=1}^n (k+3)^2$.

Esercizio 3. Si consideri la seguente ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1, \quad \text{per ogni } n \geq 1 \end{cases}$$

Trovare una espressione in forma chiusa per a_n (ossia scrivere a_n in funzione di n) e dimostrare per induzione che è corretta.

Esercizio 4. Sia $\{a_n\}$ la successione definita dalla seguente ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \quad \text{per ogni } n \geq 3 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $a_n \leq 2^n$ per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 5. Sia $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ la successione dei numeri di Fibonacci,

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{per } n \geq 3 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$, per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 6. Scrivere le tabelle di verità¹ delle seguenti formule:

1. $(p \Rightarrow q) \vee \sim p$
2. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
3. $(p \Rightarrow (p \equiv q)) \vee \sim(p \vee q)$
4. $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

Esercizio 7. Scrivere come formule proposizionali le frasi seguenti:

1. Condizione sufficiente affinché x sia dispari è che x sia primo e maggiore di 2;
2. Fiorello va al cinema solo se si sta proiettando una commedia;
3. Condizione necessaria e sufficiente perché uno sceicco sia felice è avere vino, donne e canti;
4. Condizione necessaria affinché una successione s sia convergente è che s sia limitata.

Esercizio 8. Per ognuna delle seguenti tabelle di verità, trovare una formula corrispondente

p	q	r	???
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

p	q	r	???
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

Esercizio 9. Sia X la formula seguente

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \vee (r \equiv \sim p)$$

Scrivere due formule equivalenti a X , una in forma normale congiuntiva e l'altra in forma normale disgiuntiva.

¹Ricordiamo le tabelle di verità dei connettivi principali

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \equiv q$	$p \downarrow q$	$p q$
T	T	F	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T	T	T

Esercizio 10. Per ognuna delle seguenti formule, dire se è una tautologia, una contraddizione, o una contingenza.

- | | |
|--|--|
| 1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ | 7. $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ |
| 2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$ | 8. $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ |
| 3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ | 9. $(\sim p \vee \sim q) \equiv \sim(p \vee q)$ |
| 4. $p \Rightarrow \sim p$ | 10. $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ |
| 5. $p \equiv \sim p$ | 11. $(p \equiv (p \wedge q)) \equiv (q \equiv (p \vee q))$ |
| 6. $(p \equiv q) \equiv (\sim p \equiv \sim q)$ | |

Esercizio 11. Ridurre le formule seguenti, che contengono le costanti **t** (True) e **f** (False) a formule che o non contengono né **t** né **f**, oppure sono uguali o a **t** o a **f**:

- $((\mathbf{t} \Rightarrow p) \wedge (q \vee \mathbf{f})) \Rightarrow ((q \Rightarrow \mathbf{f}) \vee (r \Rightarrow \mathbf{t}))$
- $(p \vee \mathbf{t}) \Rightarrow q$
- $\sim(p \vee \mathbf{t}) \equiv (\mathbf{f} \Rightarrow q)$
- $(\sim(p \vee \mathbf{f}) \wedge (q \equiv \mathbf{t})) \Rightarrow (r \wedge \mathbf{t})$

Esercizio 12. 1. Definire il connettivo \wedge in termini dei connettivi \sim e \Rightarrow

- Definire il connettivo \equiv in termini dei connettivi \wedge e \Rightarrow
- Definire il connettivo \vee in termini del connettivo \Rightarrow
- Definire il connettivo \sim in termini del connettivo \Rightarrow e di **f**

Esercizio 13. 1. Definire ognuno dei connettivi \wedge , \Rightarrow , \equiv , in termini dei connettivi \vee e \sim ;

- Definire ognuno dei connettivi \vee , \Rightarrow , \equiv , in termini dei connettivi \wedge e \sim .

Esercizio 14. 1. Definire i connettivi \vee e \sim in termini del connettivo \downarrow

- Definire i connettivi \wedge e \sim in termini del connettivo \downarrow

Esercizio 15. Scrivere le formule $(p \Rightarrow \sim q) \vee r$ e $(p \vee q) \wedge (\sim r \Rightarrow p)$ in notazione polacca.

Esercizio 16. Scrivere le formule dell'Esercizio 6 in notazione polacca.

Esercizio 17. Ad ogni sequenza \mathcal{F} di simboli e lettere possiamo associare un numero in questo modo: contiamo +1 per ognuno dei simboli \Rightarrow , \wedge , \vee e \equiv , contiamo 0 per il simbolo \sim e contiamo -1 per ogni lettera; infine associamo a \mathcal{F} la somma dei numeri.

Sia \mathcal{F} una sequenza di lettere e simboli. Dimostrare, per induzione sulla lunghezza di \mathcal{F} , che \mathcal{F} è una f.b.f. in notazione polacca se e solo se il numero associato a \mathcal{F} è -1 e la somma dei simboli di ogni segmento iniziale proprio (sottostringa iniziale) è maggiore o uguale a 0.