

Logica e Reti Logiche

Esercitazione

Francesco Pasquale

2 dicembre 2024

Esercizio 1. Scrivere in binario i seguenti numeri espressi in decimale¹

11_{10} , 87_{10} , 118_{10} , 365_{10} , 512_{10}

Esercizio 2. Scrivere in binario la vostra data di nascita.

Tipicamente il formato decimale di una data è $gg/mm/aaaa$. Come dovrebbe essere il formato di una data in binario? e in esadecimale?

Esercizio 3. Scrivere in decimale i seguenti numeri espressi in binario

1010_2 , 110110_2 , 11001100_2 , 11110000_2 , 01011010_2

Esercizio 4. Scrivere in esadecimale i numeri degli Esercizi 1 e 3.

Esercizio 5. Scrivere in binario e in decimale i seguenti numeri espressi in esadecimale

$A5_{16}$, $35B_{16}$, $CEE2_{16}$, $6E42_{16}$, $D0000000_{16}$

Esercizio 6. Scrivere in esadecimale il vostro numero di matricola.

Esercizio 7. Scrivere in *complemento a due* a dieci bit i numeri seguenti

11_{10} , -87_{10} , 118_{10} , -365_{10} , -512_{10}

Esercizio 8. Che numeri codificano in complemento a due a sei bit le seguenti sequenze di bit?

010101_2 , 101010_2 , 110101_2 , 011111_2 , 111111_2

Esercizio 9. Scrivere in complemento a due a sei bit i seguenti numeri decimali ed eseguire le somme. Quali di loro vanno in *overflow*²?

$16_{10} + 9_{10}$, $27_{10} + 31_{10}$, $-4_{10} + 19_{10}$, $3_{10} + (-32_{10})$, $-27_{10} + (-31_{10})$

¹Usiamo la notazione n_b per indicare che n è la rappresentazione del numero in base b . Per esempio, 121_{10} è una rappresentazione del numero *centoventuno*, mentre 121_3 è una rappresentazione del numero *sedici*. Il numero b , che indica la base, si intende sempre espresso in decimale.

²Una somma di due numeri in complemento a due va in *overflow* quando sommando due numeri positivi si ottiene un numero negativo, oppure quando sommando due numeri negativi si ottiene un numero positivo

		000	001	010	011	100	101	110	111
		0	1	2	3	4	5	6	7
0000	0	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	1	SOH	DC1		1	A	Q	a	q
0010	2	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011	3	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	4	EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
0101	5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	7	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1000	8	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	9	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	10	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	11	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	12	FF	FS	,	<	L	\	l	!
1101	13	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	14	SO	RS	.	>	N	'	n	~
1111	15	SI	US	/	?	O	-	o	DEL

Figura 1: Codifica ASCII

Nella codifica *ASCII* (si veda la Figura 1) si usano 7 bit per codificare $2^7 = 128$ caratteri.³

Esercizio 10. Scrivete il vostro nome in codifica *ASCII*. Scrivete poi in esadecimale la codifica di ogni lettera del vostro nome.

Nell'algebra Booleana, ossia quella in cui i valori delle variabili sono soltanto 0 (**False**) e 1 (**True**), con i simboli “.” e “+” indichiamo rispettivamente le operazioni di AND e OR, e con una barretta $\bar{x}$ sopra una variabile x ne indichiamo la negazione, valgono le seguenti uguaglianze

$$\begin{array}{l}
 \text{Assorbimento} \\
 \text{Combinazione} \\
 \text{Consenso}
 \end{array}
 \left\| \begin{array}{l}
 x(x+y) = x \\
 xy + x\bar{y} = x \\
 xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z
 \end{array} \right| \begin{array}{l}
 x + xy = x \\
 (x+y)(x+\bar{y}) = x \\
 (x+y)(\bar{x}+z)(y+z) = (x+y)(\bar{x}+z)
 \end{array}$$

Esercizio 11. Verificare le uguaglianze “Assorbimento”, “Combinazione” e “Consenso” usando le tabelle di verità.

³Nella tabella in Figura 1 i tre bit che indicizzano le colonne sono quelli più significativi. Per esempio, la codifica della lettera *F* è 1000110

Esercizio 12. Dimostrare le uguaglianze “Assorbimento”, ”Combinazione” e “Consenso” usando le proprietà delle operazioni AND e OR

	AND	OR
Elemento neutro	$x \cdot 1 = x$	$x + 0 = x$
Annullamento	$x \cdot 0 = 0$	$x + 1 = 1$
Idempotenza	$x \cdot x = x$	$x + x = x$
Complementarità	$x \cdot \bar{x} = 0$	$x + \bar{x} = 1$
Commutatività	$xy = yx$	$x + y = y + x$
Associatività	$x(yz) = (xy)z$	$x + (y + z) = (x + y) + z$
Distributività	$x(y + z) = xy + xz$	$x + yz = (x + y)(x + z)$

Un *grafo* G è una coppia $G = (V, E)$ in cui V è un insieme finito ed E è un insieme di coppie di elementi di V . Per esempio, $G = (V, E)$ dove

$$V = \{a, b, c, d\}, \quad E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}. \quad (1)$$

Gli elementi di V si chiamano *nod*i (o *vertici*) del grafo, gli elementi di E si chiamano *archi*. Ogni grafo può essere disegnato pensando ai nodi come punti e agli archi come linee che uniscono i punti. Per esempio, il grafo in (1) può essere disegnato come in Figura 2

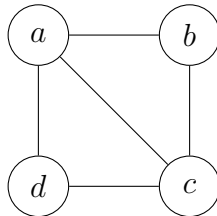


Figura 2: Disegno del grafo in (1)

Un grafo in cui V è $\{0, 1\}^n$, ossia l'insieme di tutte le stringhe di n bit, ed E è formato da tutte le coppie di stringhe che differiscono per un unico bit si chiama n -cubo.

Esercizio 13. Disegnare un 3-cubo e un 4-cubo.

Esercizio 14. Quanti nodi contiene un n -cubo? quanti archi?

Un *cammino* in un grafo è una sequenza di nodi $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ tali che $\{v_i, v_{i+1}\}$ è un arco per ogni $i = 0, 1, \dots, k - 1$. Per esempio, nel grafo in (1) (si faccia riferimento anche alla Figura 2) (a, c, d) è un cammino, mentre (a, b, d) non è un cammino.

Esercizio 15. Evidenziare il cammino individuato dal codice Gray nel disegno di un 3-cubo e nel disegno di un 4-cubo.

Esercizio 16. Costruire un circuito che implementi la formula seguente

$$(p \rightarrow q \wedge r) \vee (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Esercizio 17. Costruire un circuito che implementi la seguente tabella di verità

p	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
q	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
r	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
s	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$?$	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Esercizio 18. Costruire un circuito che implementi la seguente funzione booleana⁴

$$f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$$

Esercizio 19. Costruire un circuito che implementi la seguente funzione booleana

$$f : \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv 0 \pmod{3} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 20. Scrivere la mappa di Karnaugh della tabella di verità dell'Esercizio 17. Qual è il numero di implicant che avete?

Esercizio 21. Sappiamo come costruire una formula in forma normale disgiuntiva (somma di prodotti) a partire da una mappa di Karnaugh. Come possiamo costruire una formula in forma normale congiuntiva (prodotto di somme) a partire dalla stessa mappa (senza costruire prima la disgiuntiva)?

Esercizio 22. Progettare un circuito che prenda in input due numeri espressi in binario a quattro bit, $\mathbf{a} = a_3a_2a_1a_0$ e $\mathbf{b} = b_3b_2b_1b_0$ e restituisca 1 se $\mathbf{b}$ è il doppio di $\mathbf{a}$ e 0 altrimenti (per esempio, se $a_3a_2a_1a_0 = 0110$ e $b_3b_2b_1b_0 = 1100$ il circuito deve restituire 1, perché $\mathbf{a} = (6)_{10}$ e $\mathbf{b} = (12)_{10}$).

Esercizio 23. Progettare un circuito che implementi il seguente algoritmo.

INPUT: Tre bit, x_1, x_2, x_3 .

OUTPUT: Un bit, y .

if $x_1 = 1$ **then**

$y = x_2$

else

$y = x_3$

return y

Esercizio 24. Progettare un circuito con tre ingressi, x_0, x_1, x_2 , e un'uscita, y , che implementi la formula seguente

$$y = \overline{x_0}x_2 + \overline{x_1}x_2 + x_0x_1\overline{x_2}$$

usando due *Half-Adder* e nessun'altra porta logica.

⁴Con in simbolo $\oplus$ indichiamo l'operatore *XOR* (*OR* esclusivo), quindi in generale $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ vale 1 se un numero dispari di variabili sono 1 e vale 0 altrimenti