Logica e Reti Logiche

Esercitazione

Francesco Pasquale

17 ottobre 2024

Esercizio 1. Trovare una funzione biunivoca da $\mathbb{N}$ all'insieme dei numeri dispari.

Esercizio 2. Dimostrare per assurdo che i numeri primi sono infiniti.

Esercizio 3. Dimostrare per assurdo che $\sqrt{2}$ non è un numero *razionale*¹.

Esercizio 4. Dimostrare per induzione che

1. Per ogni $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

2. Per ogni $n \geq 1$, $n^3 - n$ è divisibile per 3

Nell'esercizio precedente abbiamo dimostrato che $\frac{n(n+1)}{2}$ è una espressione in forma chiusa della somma $\sum_{k=1}^n k$ e che $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ lo è della somma $\sum_{k=1}^n k^2$.

Esercizio 5. Trovare una espressione in forma chiusa di $\sum_{k=1}^n (k+3)^2$.

Esercizio 6. Si consideri la seguente ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= 2a_n + 1, \quad \text{per ogni } n \geq 1 \end{cases}$$

Trovare una espressione in forma chiusa per a_n (ossia scrivere a_n in funzione di n) e dimostrare per induzione che è corretta.

¹Ossia, non esistono due numeri $p, q \in \mathbb{N}$ tali che $p/q = \sqrt{2}$

Esercizio 7. Sia $\{a_n\}$ la successione definita dalla seguente ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \quad \text{per ogni } n \geq 3 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $a_n \leq 2^n$ per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 8. Sia $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ la successione dei numeri di Fibonacci,

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{per } n \geq 3 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$, per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 9. Scrivere le tabelle di verità² delle seguenti formule:

1. $(p \rightarrow q) \vee \neg p$
2. $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
3. $(p \rightarrow (p \equiv q)) \vee \neg(p \vee q)$
4. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Esercizio 10. Scrivere come formule proposizionali le frasi seguenti:

1. Condizione sufficiente affinché x sia dispari è che x sia primo e maggiore di 2;
2. Fiorello va al cinema solo se si sta proiettando una commedia;
3. Condizione necessaria e sufficiente perché uno sceicco sia felice è avere vino, donne e canti;
4. Condizione necessaria affinché una successione s sia convergente è che s sia limitata.

Esercizio 11. Per ognuna delle seguenti tabelle di verità, trovare una formula corrispondente

²Ricordiamo le tabelle di verità dei connettivi principali

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \equiv q$	$p \downarrow q$	$p q$
T	T	F	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T	T	T

p	q	r	???
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

p	q	r	???
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

Esercizio 12. Sia X la formula seguente

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \vee (r \equiv \neg p)$$

Scrivere due formule equivalenti a X , una in forma normale congiuntiva e l'altra in forma normale disgiuntiva.

Esercizio 13. Per ognuna delle seguenti formule, dire se è una tautologia, una contraddizione, o una contingenza.

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$	7. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$	8. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	9. $(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \vee q)$
4. $p \rightarrow \neg p$	10. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
5. $p \equiv \neg p$	11. $(p \equiv (p \wedge q)) \equiv (q \equiv (p \vee q))$
6. $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$	

Esercizio 14. Ridurre le formule seguenti, che contengono le costanti **t** (True) e **f** (False) a formule che o non contengono né **t** né **f**, oppure sono uguali o a **t** o a **f**:

- $((\mathbf{t} \rightarrow p) \wedge (q \vee \mathbf{f})) \rightarrow ((q \rightarrow \mathbf{f}) \vee (r \rightarrow \mathbf{t}))$
- $(p \vee \mathbf{t}) \rightarrow q$
- $\neg(p \vee \mathbf{t}) \equiv (\mathbf{f} \rightarrow q)$
- $(\neg(p \vee \mathbf{f}) \wedge (q \equiv \mathbf{t})) \rightarrow (r \wedge \mathbf{t})$

Esercizio 15. 1. Definire il connettivo $\wedge$ in termini dei connettivi $\neg$ e $\rightarrow$

- Definire il connettivo $\equiv$ in termini dei connettivi $\wedge$ e $\rightarrow$
- Definire il connettivo $\vee$ in termini del connettivo $\rightarrow$
- Definire il connettivo $\neg$ in termini del connettivo $\rightarrow$ e di **f**

Esercizio 16. 1. Definire ognuno dei connettivi $\wedge$, $\rightarrow$, $\equiv$, in termini dei connettivi $\vee$ e $\neg$;

2. Definire ognuno dei connettivi $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$, in termini dei connettivi $\wedge$ e $\neg$.

Esercizio 17. 1. Definire i connettivi $\vee$ e $\neg$ in termini del connettivo $\downarrow$

2. Definire i connettivi $\wedge$ e $\neg$ in termini del connettivo $\downarrow$

Esercizio 18. Scrivere le formule $(p \rightarrow \neg q) \vee r$ e $(p \vee q) \wedge (\neg r \rightarrow p)$ in notazione polacca.

Esercizio 19. Scrivere le formule dell'Esercizio 9 in notazione polacca.

Esercizio 20. Ad ogni sequenza $\mathcal{F}$ di simboli e lettere possiamo associare un numero in questo modo: contiamo +1 per ognuno dei simboli $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ e $\equiv$, contiamo 0 per il simbolo $\neg$ e contiamo -1 per ogni lettera; infine associamo a $\mathcal{F}$ la somma dei numeri.

Sia $\mathcal{F}$ una sequenza di lettere e simboli. Dimostrare, per induzione sulla lunghezza di $\mathcal{F}$, che $\mathcal{F}$ è una f.b.f. in notazione polacca se e solo se il numero associato a $\mathcal{F}$ è -1 e la somma dei simboli di ogni segmento iniziale proprio (sottostringa iniziale) è maggiore o uguale a 0.