

Logica e Reti Logiche

Anno Accademico: 2023-2024

Sessione Estiva Anticipata - Primo Appello

Docente: Francesco Pasquale

22 gennaio 2024

Compito A

Ogni esercizio vale 6 punti. La sufficienza si raggiunge con 18 punti.

Esercizio 1. Si consideri la successione $\{a_n\}_{n \geq 0}$ definita da

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 3a_{n-1} + 1 \quad \text{per } n \geq 1 \end{cases}$$

1. Scrivere i primi cinque termini della successione;
2. Dimostrare per induzione che $a_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$, per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 2. Dire se la formula seguente è una tautologia, una contraddizione o una contingenza, motivando la risposta

$$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \rightarrow [(\neg p \vee \neg r) \wedge (q \vee s)]$$

Esercizio 3. Una delle due formule seguenti è valida, l'altra no:

$$\exists x[P(x) \vee Q(x)] \equiv [\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)]$$

$$\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \equiv [\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)]$$

Per la formula valida dare una dimostrazione usando il metodo dei *tableaux*; per quella non valida esibire un'interpretazione in cui la formula è falsa.

Esercizio 4. Usando soltanto porte AND, OR e NOT, progettare un circuito con tre bit in input, x_1 , x_2 e x_3 , e un bit in output, y , che implementi il seguente algoritmo:

```
if  $x_1 = 1$  then
   $y = x_2 \vee x_3$ 
else
   $y = x_2 \wedge x_3$ 
return  $y$ 
```

Esercizio 5. Un circuito sequenziale con un ingresso x , un'uscita y , e due D -FlipFlop è descritto dalle seguenti equazioni:

$$D_1 = (Q_1 \oplus Q_2) + \bar{Q}_2x; \quad D_2 = (Q_1 \oplus Q_2)\bar{x} + Q_1Q_2x; \quad y = \bar{Q}_1Q_2\bar{x}$$

dove Q_i e D_i indicano rispettivamente lo stato corrente e lo stato futuro dell' i -esimo FlipFlop, per $i = 1, 2$.

1. Derivare la tabella di stato e il diagramma di stato;
2. Disegnare lo schema del circuito.