

Logica e Reti Logiche

(Episodio 6: Sistemi assiomatici per la logica proposizionale)

Francesco Pasquale

23 ottobre 2023

Negli episodi precedenti abbiamo introdotto la logica proposizionale e abbiamo studiato il *metodo dei tableaux*. In questo episodio introduciamo i sistemi assiomatici con i relativi concetti di “teorema”, “dimostrazione” e “derivazione”.

1 Sistemi assiomatici: pronti, partenza, ...

Una sistema formale consiste in *schemi di assiomi* e *regole di inferenza*, oltre che dell'insieme dei simboli che vengono usati e delle definizioni che stabiliscono quali sequenze di simboli sono “formula”. Nel caso della logica proposizionale gli schemi di assiomi sono un insieme di formule ben formate e le regole di inferenza sono relazioni di formule di questo tipo: “Dalle formule $X_1, \dots, X_n$ segue la formula Y ”. Vediamo subito un esempio. Consideriamo i due assiomi seguenti¹

$$\begin{aligned} A_1 : & X \rightarrow (Y \rightarrow X) \\ A_2 : & (X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z)) \end{aligned}$$

Esercizio 1. Verificare che A_1 e A_2 sono tautologie.

La regola di inferenza che usiamo si chiama *Modus Ponens*: “Dalle formule X e $X \rightarrow Y$ segue la formula Y ”. In simboli la scriviamo così

$$\frac{X, X \rightarrow Y}{Y}$$

In questo episodio chiamerò S_0 il *sistema assiomatico* costituito dagli assiomi in A_1 e A_2 e dalla regola di inferenza Modus Ponens.

¹Per essere rigoroso dovrei chiamare questi “schemi di assiomi”, ma per il momento la considero sottigliezza e mettiamola da parte

Esercizio 2. Date due formule X e Y , verificare che se X e $X \rightarrow Y$ sono tautologie, allora anche Y è una tautologia.

Diciamo che una formula $\mathcal{F}$ è un'istanza di un assioma, se si ottiene da uno schema di assioma, sostituendo ad ogni lettera dello schema una formula. Per esempio, la formula $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ è un'istanza dell'assioma A_1 , perché si ottiene da A_1 sostituendo $(q \rightarrow r)$ alla lettera X e p alla lettera Y .

Esercizio 3. Verificare che la formula $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ è una tautologia.

Esercizio 4. Osservare che se un certo assioma A è una tautologia, allora ogni istanza dell'assioma A è una tautologia.

2 Teoremi e dimostrazioni

Abbiamo iniziato questo corso ponendoci la domanda “Cos'è una dimostrazione?”. Nell'ambito di un sistema assiomatico, possiamo darne una definizione precisa.

Definizione 2.1 (Dimostrazione). In un sistema assiomatico $\mathcal{S}$, una dimostrazione è una sequenza di formule $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ tale che ogni formula $\mathcal{F}_i$

1. O è un'istanza di un assioma;
2. Oppure si ottiene dalle formule precedenti della sequenza tramite una regola di inferenza.

Esempio. Consideriamo il nostro sistema $\mathcal{S}_0$. Nel seguito la indicheremo con *M.P.* la regola di inferenza *Modus Ponens*.

- | | |
|---|-------------------------------------|
| (1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ | [A_1 con $X = p, Y = q$] |
| (2) $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p))$ | [A_2 con $X = p, Y = q, Z = p$] |
| (3) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)$ | [(1), (2) e <i>M.P.</i>] |

La sequenza di formule (1), (2) e (3) qui sopra è una dimostrazione secondo la Definizione 2.1. Infatti, le formule (1) e (2) sono istanze di assiomi, e la formula (3) si ottiene dalle due formule precedenti usando la regola di inferenza *Modus Ponens*, dove abbiamo posto $X = (p \rightarrow (q \rightarrow p))$ e $Y = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)$.

A questo punto possiamo anche dire cos'è un *teorema* in un sistema assiomatico.

Definizione 2.2 (Teorema). In un sistema assiomatico, un *teorema* è l'ultima formula di una dimostrazione.

Esercizio 5. La formula $p \rightarrow p$ è un teorema del sistema $\mathcal{S}_0$.

(Suggerimento: Istanziare l'assioma A_1 con $X = p$ e $Y = (p \rightarrow p)$, l'assioma A_2 con $X = p, Y = (p \rightarrow p)$, e $Z = p$ e usare *Modus Ponens*. Poi istanziare A_1 con ...)

3 Derivazioni e il Teorema di Deduzione

Un concetto che estende quello di dimostrazione è quello che chiamiamo *derivazione*.

Definizione 3.1 (Derivazione). Sia $\mathcal{S}$ un sistema assiomatico, sia $\mathcal{F}$ una formula e sia Γ un insieme di formule. Diciamo che $\mathcal{F}$ *deriva* da Γ nel sistema $\mathcal{S}$ se esiste una sequenza di formule $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ tali che $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ e ognuna delle $\mathcal{F}_i$, per $i = 1, \dots, n$,

1. O è un'istanza di un assioma;
2. O si ottiene dalle formule precedenti della sequenza tramite una regola di inferenza;
3. Oppure è una delle formule dell'insieme Γ .

La sequenza $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ si chiama *derivazione* di $\mathcal{F}$ da Γ . Le formule in Γ sono le *ipotesi* della derivazione.

Introduciamo anche un po' di simboli. Quando una formula $\mathcal{F}$ deriva da un insieme Γ in un sistema assiomatico $\mathcal{S}$ scriviamo $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \mathcal{F}$. Quando il sistema $\mathcal{S}$ di cui stiamo parlando è chiaro dal contesto lo omettiamo e scriviamo semplicemente $\Gamma \vdash \mathcal{F}$.

Esempio. Consideriamo sempre il nostro sistema $\mathcal{S}_0$ e facciamo vedere che la formula $p \rightarrow r$ deriva dalle formule $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow r$. In simboli

$$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow r.$$

Chiamiamo $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow r$ rispettivamente *Ipotesi 1* e *Ipotesi 2*.

- | | | |
|-----|---|---|
| (1) | $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ | $[A_2 \text{ con } X = p, Y = q, Z = r]$ |
| (2) | $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ | $[A_1 \text{ con } X = (q \rightarrow r), Y = p]$ |
| (3) | $q \rightarrow r$ | [Ipotesi 2] |
| (4) | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | [(3), (2) e <i>M.P.</i>] |
| (5) | $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ | [(4), (1) e <i>M.P.</i>] |
| (6) | $p \rightarrow q$ | [Ipotesi 1] |
| (7) | $p \rightarrow r$ | [(6), (5) e <i>M.P.</i>] |

La sequenza di formule (1), ..., (7) qui sopra è una derivazione della formula $p \rightarrow r$ dall'insieme di formule $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\}$. Le formule (1) e (2) sono istanze di assiomi, (3) e (6) sono le ipotesi, (4), (5) e (7) seguono da formule precedenti tramite Modus Ponens.

Adesso, direi che tocca a voi fare un po' di pratica...

Esercizio 6. Dimostrare che nel sistema $\mathcal{S}_0$

$$\{p \rightarrow (q \rightarrow r), q\} \vdash p \rightarrow r$$

Se confrontate le definizioni di dimostrazione e teorema con quella di derivazione, potete osservare che una dimostrazione di $\mathcal{F}$ è una derivazione di $\mathcal{F}$ con $\Gamma = \emptyset$. Per indicare che una formula $\mathcal{F}$ è un teorema nel sistema $\mathcal{S}$ perciò scriveremo $\vdash \mathcal{F}$.

Esercizio 7. Sia $\mathcal{F}$ una formula qualunque. Dimostrare che nel sistema $\mathcal{S}_0$

$$\vdash \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

E adesso qualcosa di più impegnativo.

Esercizio 8. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due formule. Dimostrare che se in $\mathcal{S}_0$ si può derivare $\mathcal{G}$ da $\mathcal{F}$, allora $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un teorema. In simboli, se $\{\mathcal{F}\} \vdash \mathcal{G}$ allora $\vdash \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.
(Suggerimento: Sia $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ una derivazione di $\mathcal{G}$ da $\mathcal{F}$. Dimostrare, per induzione su i , che $\vdash \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$)

L'esercizio precedente si può generalizzare un po', ottenendo quello che si chiama Teorema di deduzione.

Teorema 3.2 (Teorema di deduzione). Sia Γ un insieme di formule e siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due formule. Nel sistema $\mathcal{S}_0$ se $\Gamma \cup \{\mathcal{F}\} \vdash \mathcal{G}$ allora $\Gamma \vdash \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.

Esercizio 9. Dimostrare il teorema di deduzione.

4 Conclusioni

In questo episodio abbiamo introdotto i *sistemi assiomatici* per la logica proposizionale. Osservate che dall'Esercizio 2 segue che in un qualunque sistema assiomatico in cui gli schemi di assiomi sono tautologie e la regola di inferenza è Modus Ponens, tutti i teoremi sono tautologie. Il nostro sistema $\mathcal{S}_0$ quindi è *corretto*. Sarà anche *completo*? Così com'è adesso, no, non è completo. Ma è sufficiente aggiungere uno schema di assioma per rendelo completo, per esempio questo:

$$A_3 : (\neg X \rightarrow \neg Y) \rightarrow ((\neg X \rightarrow Y) \rightarrow X)$$

Se chiamiamo $\mathcal{S}_1$ il sistema assiomatico formato dagli assiomi A_1 , A_2 , e A_3 e dalla regola di inferenza Modus Ponens, si può infatti dimostrare che ogni tautologia è un teorema nel sistema $\mathcal{S}_1$. Ma per il momento non ci addentriamo in questo discorso.

Per finire, un paio di esercizi sul sistema $\mathcal{S}_1$.

Esercizio 10. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due formule. Dimostrare che nel sistema $\mathcal{S}_1$

1. $\neg \mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G})$
2. $(\neg \mathcal{G} \rightarrow \neg \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G})$

Suggerimento: Es 1. Dimostrare prima che $\{\neg \mathcal{F}, \mathcal{F}\} \vdash \mathcal{G}$, quindi dal Teorema di deduzione seguirà che $\{\neg \mathcal{F}\} \vdash \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ e poi, usando ancora il Teorema di deduzione, ...

Es.2. Dimostrare prima che $\{\neg \mathcal{G} \rightarrow \neg \mathcal{F}, \mathcal{F}\} \vdash \mathcal{G}$ e poi usare due volte il Teorema di deduzione