La proprietà di Petri per curve su superfici abeliane

Marcello Paris

Dottorato di ricerca in Matematica, ciclo XI
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Relatore: Prof. Giuseppe Pareschi

Roma, 13 dicembre 2000

Indice

Introduzione

Descrizione del risultato 1

1. Formulazione e tecnica del problema 6

2. Risultati di non esistenza 14

3. Proprietà di Petri 20

Appendice

4. Fasci omogenei e trasformazione di Mukai 36

Bibliografia 41

Descrizione del risultato

Scopo di questa tesi è lo studio delle varietà di divisori speciali sulle curve immerse in superfici abeliane; il risultato che è qui dimostrato, parte al corollario 2.2. e parte alla proposizione 3.2., è il seguente.

TEOREMA. *Sia X una superficie abeliana definita su $\mathbb{C}$ e munita di una polarizzazione $c_1(H) \in \text{NS}(X)$, per un qualche fibrato lineare ampio $H \in \text{Pic}(X)$, di tipo $(1, n)$, $n \geq 2$, tale che $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}c_1(H)$; ogni curva liscia $C \in |H|$ ha genere $g_C = n + 1$ e per ogni scelta di $r \in \mathbb{N}^*$ e $d \in \mathbb{N}^*$, ponendo $\rho(g_C, r, d) := g_C - (r + 1)(g_C - d + r)$, si ha che*

- *su ogni curva liscia $C \in |H|$, se $\rho(g_C, r, d) < -r(r + 2)$ non esistono fibrati lineari A con $h^0(C, A) = r + 1$ e grado $\text{deg}(A) = d$,*
- *sulla curva generica $C \in |H|$, che è liscia, per $d \neq g_C - 1$,*
 - *se $\rho(g_C, r, d) < 0$ non esistono fibrati lineari A con $h^0(C, A) = r + 1$ e $\text{deg}(A) = d$,*
 - *se $\rho(g_C, r, d) \geq 0$, l'applicazione di moltiplicazione*

$$\mu_0(C, A) : H^0(C, A) \otimes H^0(C, A^\vee \otimes K_C) \longrightarrow H^0(C, K_C)$$

è iniettiva, per ogni fibrato lineare A con $h^0(C, A) = r + 1$ e grado $\text{deg}(A) = d$.

La prima parte dell'enunciato è dimostrata nel secondo paragrafo, mentre la seconda parte dell'enunciato nel terzo; l'approccio impiegato per quest'ultima parte lascia scoperto il caso in cui $d = g_C - 1$: l'attesa è che possa essere completato in modo da coprire anche questo caso mancante, peraltro, le stesse tecniche sviluppate nel seguito dovrebbero essere sufficienti a questo scopo, ma, per il momento, non si riescono a superare le differenti configurazioni cui dà origine il caso in questione.

Ad ogni modo, per la prima parte dell'enunciato sono sufficienti alcune analisi di stabilità su una classe di fibrati vettoriali che sarà introdotta in seguito (cfr. Costruzione a p. 8), mentre, per la seconda parte si utilizza la trasformazione di Fourier-Mukai per arrivare ad una descrizione 'duale' del problema, ossia, ad una lettura della medesima situazione sulla superficie abeliana duale; nel seguire questo approccio, sono dimostrati vari risultati sul calcolo della trasformazione di Fourier-Mukai di un fascio coerente privo di torsione su di una superficie abeliana (cfr. Proposizione 3.5. e seguenti) e vengono fornite delle stime sulle dimensioni di certi spazi di coomologia (cfr. Proposizione 2.3.).

Qui di seguito viene brevemente illustrato il significato geometrico di quanto enunciato e, in ultimo, dopo un accenno alla storia di questo problema, viene fornita una descrizione dell'organizzazione del testo.

Sia C una curva algebrica definita su $\mathbb{C}$, proiettiva e liscia. Per ogni $r \in \mathbb{N}$ e $d \in \mathbb{N}$, si denota con $G_d^r(C)$ la varietà delle serie lineari su C di dimensione r e grado d , non necessariamente complete, e con $W_d^r(C)$ la varietà che parametrizza le serie lineari complete su C di grado d e di dimensione almeno r .

DEFINIZIONE. Siano fissati $r \in \mathbb{N}$ e $d \in \mathbb{N}$; si dice che la curva C , in dimensione r e grado d ,

- *soddisfa la condizione di non esistenza di Brill-Noether* se, qualora si abbia

$$\rho(g_C, r, d) := g_C - (r + 1)(g_C - d + r) < 0,$$

allora non esiste alcun fibrato lineare A su C con $h^0(C, A) = r + 1$ e grado $\deg(A) = d$;

- *soddisfa la condizione di Brill-Noether* se la varietà $W_d^r(C)$ è ridotta e ogni sua componente irriducibile ha la dimensione attesa $\rho(g_C, r, d)$;

- *soddisfa la condizione di Petri* se, per ogni fibrato lineare A su C con $h^0(C, A) = r + 1$ e $\deg(A) = d$, l'applicazione di moltiplicazione

$$\mu_0(C, A) : H^0(C, A) \otimes H^0(C, A^\vee \otimes K_C) \longrightarrow H^0(C, K_C)$$

è iniettiva.

È immediato osservare che la condizione di Petri rappresenta un raffinamento della condizione di non esistenza di Brill-Noether per ogni $r \in \mathbb{N}$ e $d \in \mathbb{N}$: è chiaro che, se l'applicazione di moltiplicazione è iniettiva, allora, la dimensione del dominio, come spazio vettoriale, deve essere minore o uguale a quella del codominio dell'applicazione di prodotto cup. Meno evidente è il fatto che la condizione di Petri implichi la condizione di Brill-Noether; il legame della proprietà di Petri con la geometria locale delle varietà di serie lineari è sintetizzato nella seguente proposizione (cfr. [ACGH], Prop. 4.1. e 4.2.).

PROPOSIZIONE. Per ogni $r \in \mathbb{N}$ e $d \in \mathbb{N}$, sia $[A] \in W_d^r(C)$ un fibrato lineare su C con $h^0(C, A) = r + 1$ e grado $\deg(A) = d$; $[A]$ è un punto liscio di $W_d^r(C)$ se e soltanto se l'applicazione di moltiplicazione

$$\mu_0(C, A) : H^0(C, A) \otimes H^0(C, A^\vee \otimes K_C) \longrightarrow H^0(C, K_C)$$

è iniettiva.

Dalla proposizione precedente segue che, per ogni $r \in \mathbb{N}$ e $d \in \mathbb{N}$, la condizione di Petri è equivalente al fatto che la varietà $W_d^r(C)$ sia non singolare di dimensione $\rho(g_C, r, d)$ nei punti $[A] \in W_d^r(C)$ con $h^0(C, A) = r + 1$; si può mostrare (cfr. [AC], Cap. 4 e 5) che la condizione di Petri può essere pensata come un teorema di singolarità per le $W_d^r(C)$, in quanto, la sua validità implica che il luogo singolare della varietà $W_d^r(C)$ è esattamente $W_d^{r+1}(C)$.

Il risultato dimostrato in questa tesi può essere quindi riformulato come segue.

TEOREMA. *Sia X una superficie abeliana definita su $\mathbb{C}$ e munita di una polarizzazione $c_1(H) \in \text{NS}(X)$, per un qualche fibrato lineare ampio $H \in \text{Pic}(X)$, di tipo $(1, n)$, $n \geq 2$, tale che $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}c_1(H)$; ogni curva liscia $C \in |H|$ ha genere $g_C = n + 1$ e per ogni scelta di $r \in \mathbb{N}^*$ e $d \in \mathbb{N}^*$, ponendo $\rho(g_C, r, d) := g_C - (r + 1)(g_C - d + r)$, si ha che*

- per ogni curva liscia $C \in |H|$, se $\rho(g_C, r, d) < -r(r + 2)$, allora le varietà $G_d^r(C)$ sono vuote;
- per $d \neq g_C - 1$, per la curva generica $C \in |H|$ soddisfa la condizione di Petri in dimensione r e grado d .

Nei primi anni '20, Petri [Pe] fu il primo ad intuire che la situazione espressa nella definizione della pagina precedente era quella di una qualsiasi curva algebrica sufficientemente generale; il problema fu nuovamente studiato a partire dalla seconda metà degli anni '70 con il contributo di vari autori, tra cui soprattutto Arbarello-Cornalba [AC] e Griffiths-Harris [GH]; nel 1982, D. Gieseker [G] mostrò che la congettura di Petri era valida per la generica curva in ogni genere; la sua dimostrazione usava argomenti di degenerazione e quindi lo studio delle serie lineari limite su curve riducibili; il suo argomento fu semplificato da D. Eisenbud e J. Harris [EH], usando una differente degenerazione.

Nel 1986, Lazarsfeld [L2] propose un argomento completamente differente per un'altra dimostrazione del teorema di Gieseker che non usava alcuna tecnica di degenerazione e che aveva il merito di fornire esempi, anche se non troppo espliciti, di curve algebriche che soddisfacevano la proprietà di Petri; in seguito, la sua dimostrazione fu semplificata da G. Pareschi [Pa].

Quello che Lazarsfeld ha mostrato è che su una superficie $K3$ di rango di Picard uno, la generica curva nel sistema lineare generatore soddisfa la condizione di Petri; dal momento che è noto che, per ogni intero $g \geq 2$, c'è una superficie $K3$ con una polarizzazione di genere g e che, tra queste, la generica ha rango di Picard uno, il risultato di Lazarsfeld implica il

teorema di Gieseker-Petri.

Lo scopo di questa tesi è di estendere questo risultato alla generica superficie abeliana polarizzata di tipo $(1, n)$, $n \geq 2$; il principale ostacolo in un possibile tentativo di generalizzazione delle tecniche usate da Lazarsfeld e Pareschi per superfici $K3$ consiste nel fatto che una tale superficie X è irregolare con $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 2$.

L'idea e i mezzi per aggirare questo ostacolo consistono in una analisi più dettagliata della stabilità dei fibrati vettoriali introdotti da Lazarsfeld e nell'utilizzo della trasformazione di Fourier-Mukai.

Nel primo paragrafo viene descritta la strategia che verrà seguita per una dimostrazione della validità della proprietà di Petri per certe curve su una superficie abeliana generica, in particolare, per la generica curva C appartenente ad un sistema lineare H il cui $c_1(H)$ sia un generatore del gruppo di Néron-Severi $NS(X)$ di una superficie abeliana X di tipo $(1, n)$, con $n \geq 2$; come accennato sopra, l'impostazione generale del problema è dovuta a Lazarsfeld [L2], ma l'approccio seguito sarà piuttosto quello di Pareschi [Pa]; entrambi i lavori si riferiscono ad una superficie di tipo $K3$; dopo aver brevemente descritto questo approccio, verrà formulato il problema che ostruisce l'estensione di questo metodo al caso delle superfici abeliane e che sarà quasi completamente risolto nei due paragrafi successivi.

Nel secondo paragrafo sono contenuti i risultati, basilari nel corso di tutto il lavoro, sulla stabilità dei fibrati vettoriali con i quali si lavora e su alcune loro proprietà coomologiche; in particolare, è centrale la tecnica della proposizione 2.3. che si basa su un metodo per produrre fibrati stabili per estensione, implicito in alcuni lavori di Atiyah ma chiaramente enunciato per la prima volta da Kuleshov in [K] e poi ripreso e migliorato da Yoshioka in [Y].

Nel terzo paragrafo si mostra come il problema principale si riconduca ad un'analisi sulla struttura di certi fasci omogenei, che sono fasci coerenti peculiari di una superficie abeliana, e come possa essere utilizzata la trasformazione di Fourier-Mukai per il completamento di questa analisi; nel corso di questa analisi sono dimostrati alcuni risultati generali concernenti la trasformazione di Fourier-Mukai per fasci coerenti su una superficie abeliana.

Il quarto paragrafo contiene una breve introduzione alla trasformazione di Fourier-Mukai e una appendice tecnica nella quale sono raccolti i risultati usati nel testo e non completamente espliciti nella bibliografia.

Non è affatto una formalità ringraziare qui il mio relatore Prof. Giuseppe Pareschi: per l'enorme fiducia che mi ha accordato e per il suo non minore entusiasmo e insegnamento con il quale ha alimentato il mio lavoro; è sua l'intuizione della validità del risultato qui dimostrato.

Roma, 13 novembre 2000

Marcello Paris

1. Formulazione e tecnica del problema

In questo paragrafo viene descritta l'impostazione del problema dovuta a Lazarsfeld [L1, L2] (cfr. Costruzione a p. 8) e si mostra come, seguendo [Pa], la sua soluzione, in questo caso, passi per una stima sulla dimensione di un certo spazio di omomorfismi tra fasci (cfr. Corollario 1.9. e Lemma 1.10.).

NOTAZIONE. 1.1. Si denota con X una superficie abeliana definita su $\mathbb{C}$ e con $c_1(H) \in \text{NS}(X)$, per un qualche fibrato lineare ampio $H \in \text{Pic}(X)$, una polarizzazione di tipo $(1, n)$ su di essa, $n \geq 2$, tale che $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}c_1(H)$; è noto (cfr. [LB], Cap. 8, Esercizio 8.1., p. 244) che i parametri per tali superfici all'interno dello spazio dei moduli delle superfici abeliane polarizzate di tipo $(1, n)$ sono il complementare di un'unione al più numerabile di sottovarietà analitiche proprie di questo spazio.

Dato che si suppone che il gruppo di Néron-Severi $\text{NS}(X)$ sia isomorfo a $\mathbb{Z}$, la superficie abeliana X non contiene alcuna curva ellittica e non si spezza, come superficie abeliana polarizzata, nel prodotto di due curve ellittiche; questo è equivalente al fatto che il sistema lineare $|H|$ non abbia alcuna componente fissa (cfr. [LB], Cap. 10, Lemma 1.1., p. 290); inoltre, $|H|$ è un sistema lineare senza punti base, se $n \geq 3$, e con 4 punti base nel caso in cui sia $n = 2$, nel quale, comunque sia $n \geq 2$, la curva generica è liscia e irriducibile (cfr. [LB], Cap. 10, Lemma 1.2.e 1.3., p. 290).

Con $\phi_H : X \longrightarrow \text{Pic}^0(X)$ si denota l'isogenia di grado $\chi_X(H)^2$ canonicamente associata ad H , dove $\chi_X(H) = \frac{1}{2}H^2 = n$ per il teorema di Riemann-Roch. Dato che $K_X = \mathcal{O}_X$, per ogni curva liscia C sulla superficie X , si ha $\mathcal{O}_C(C) = K_C$, in altre parole, il fibrato normale alla curva C in X è isomorfo al fibrato lineare canonico di C , quindi $C^2 = c_1(\mathcal{O}_C(C)) = c_1(K_C) = 2(g_C - 1)$; in particolare, una curva liscia C nel sistema lineare $|H|$ ha genere $g_C = n + 1 \geq 3$.

È utile ricordare qualcosa a riguardo della realizzazione proiettiva di una superficie abeliana con le proprietà elencate nella notazione 1.1.

Innanzitutto, è elementare osservare che una superficie abeliana non può essere immersa in $\mathbb{P}_3$: per il teorema di Lefschetz sulle sezioni iperpiane (cfr. [GM] teorema a p. 23, oppure, [GH] p. 156), se fosse $X \subset \mathbb{P}_3$, con X superficie abeliana, l'applicazione $H_1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H_1(\mathbb{P}_3, \mathbb{C})$ sarebbe un isomorfismo, dato che $H_i((\mathbb{P}_3, X), \mathbb{C}) = 0$, per $i = 0, 1, 2$ (cfr. [D] p. 32), e si avrebbe che $h^1(X, \mathbb{C}) = h^1(\mathbb{P}_3, \mathbb{C}) = 0$, cosa che non può essere per via che $h^1(X, \mathbb{C}) = 4$.

Un risultato generale è il seguente ed è dovuto a Reider [R].

TEOREMA. Sia X una superficie abeliana definita su $\mathbb{C}$ e sia $c_1(H) \in \text{NS}(X)$, per un qualche fibrato lineare ampio $H \in \text{Pic}(X)$, una polarizzazione di tipo $(1, n)$ su di essa; per $n \geq 5$, l'applicazione $\varphi_H : X \longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}$, indotta dal sistema lineare H , è una immersione se e soltanto se non c'è nessuna curva ellittica E su X con $E \cdot H = 2$.

In particolare, esistono superfici abeliane in $\mathbb{P}_4$ e sono di tipo $(1, 5)$; è noto che sono tutte ottenute come luoghi di zeri di sezioni del fibrato di Horrocks-Mumford.

Comunque, nessun risultato di realizzazione proiettiva sarà usato in seguito nel dimostrare la validità della congettura di Petri.

NOTAZIONE. 1.2. Per ogni coppia di fasci coerenti E ed F su X si pone

$$\begin{cases} \text{ext}^i(E, F) := \dim \text{Ext}^i(E, F) , \\ \chi_X(E, F) := \text{hom}(E, F) - \text{ext}^1(E, F) + \text{ext}^2(E, F) ; \end{cases}$$

con questa notazione il teorema di Riemann-Roch (cfr. [Fu] cap. 15) si scrive:

$$\chi_X(E, F) = \text{rk}(E) \text{ch}_2(F) + \text{rk}(F) \text{ch}_2(E) - c_1(E) \cdot c_1(F) ;$$

in particolare, si ha che $\chi_X(E) = \text{ch}_2(E) = \frac{1}{2} c_1(E)^2 - c_2(E)$; seguendo Mukai, per ogni fascio coerente E su X , si pone:

$$\lambda(E) := \frac{1}{2} c_1(E)^2 - \text{rk}(E) \text{ch}_2(E) = \text{rk}(E) c_2(E) - \frac{1}{2} (\text{rk}(E) - 1) c_1(E)^2 = \frac{1}{2} \Delta(E)$$

dove $\Delta(E)$ è il discriminante del fascio E come definito in [HL], Cap. 3, p. 71; con queste notazioni si ha che $\chi_X(E, E) = -2\lambda(E)$, quindi, per dualità di Serre, che $\chi_X(E, E) = 2 \text{end}(E) - \text{ext}^1(E, E)$, ottenendo

$$\text{ext}^1(E, E) = 2(\lambda(E) + \text{end}(E)) ;$$

inoltre, si ha che $\lambda(E \otimes L) = \lambda(E)$, per ogni $L \in \text{Pic}(X)$, e $\lambda(E^\vee) = \lambda(E)$ se E è un fascio localmente libero.

Il lemma che segue ha il solo scopo di enunciare una proprietà elementare della notazione appena introdotta.

LEMMA. Sia Y una varietà proiettiva e liscia, ma non necessariamente irriducibile, definita su un campo qualsiasi; siano E e F dei fasci di $\mathcal{O}_Y$ -moduli coerenti; nel caso in cui E sia un fascio localmente libero, si ha:

$$\text{ext}^k(E, F) = h^k(Y, \text{Hom}(E, F))$$

dove $\text{Hom}(E, F) = E^\vee \otimes F$; in particolare, si ha che

$$\chi_Y(E, F) = \chi_Y(\text{Hom}(E, F)) .$$

DIMOSTRAZIONE. Se E è un fascio localmente libero, si ha che $\text{Ext}^q(E, F) = 0$ per $q \in \mathbb{N}^*$, quindi, per la successione spettrale degli Ext locali verso gli Ext globali, ossia, la successione $E_2^{p,q} := H^p(Y, \text{Ext}^q(E, F))$ convergente verso un gruppo bigraduato associato ad una filtrazione conveniente di $\text{Ext}^*(E, F)$, si ha la tesi.

Q.E.D.

AVVERTENZA. Nel seguito verranno considerati solamente fibrati lineari A su una curva $C \in |H|$ che siano senza punti base; ai fini del risultato che ci proponiamo di mostrare, questa ipotesi non è restrittiva, infatti, se D è il luogo base di una serie lineare completa A , se si mostra che l'applicazione $\mu_0(C, A(-D))$ è iniettiva, lo sarà anche l'applicazione $\mu_0(C, A)$.

L'idea di Lazarsfeld è quella di codificare in un fibrato vettoriale su X , le informazioni di un fibrato lineare senza punti base su una curva liscia in X ; il metodo è descritto nella seguente costruzione.

COSTRUZIONE. Si consideri una curva liscia C immersa in X da $i: C \rightarrow X$, insieme con una serie lineare, non necessariamente completa, su di essa, data da un fibrato lineare $A \in \text{Pic}(C)$ e da un sottospazio $V_A \subseteq H^0(C, A)$; si suppone che la serie lineare in questione sia senza punti base; componendo la proiezione $H^0(C, A) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow H^0(C, A) \otimes i_* \mathcal{O}_C$ con l'estensione a zero su X del morfismo $ev_{C, (A, V_A)}: V_A \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow A$ di valutazione delle sezioni di A in V_A , suriettivo per ipotesi, si ottiene un morfismo suriettivo

$$V_A \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow i_* A ,$$

il cui nucleo è un fascio coerente su X canonicamente associato alla curva C , alla serie lineare (A, V_A) su C e all'immersione i di C in X e che si denota con $E_{C, (A, V_A), i}^\vee$; è elementare mostrare che, poiché la curva C è liscia e A è localmente libero su C , anche il fascio $E_{C, (A, V_A), i}^\vee$ è localmente libero (cfr. [F], Cap. 2, Lemma 16, p. 41).

Dal momento che $\text{Ext}^1(i_* A, \mathcal{O}_X) = i_*(A^\vee \otimes \mathcal{O}_C(C)) = i_*(A^\vee \otimes K_C)$, dualizzando la successione esatta che definisce il fibrato $E_{C, A, i}^\vee$, si ottiene la successione

$$0 \rightarrow V_A^\vee \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow E_{C, (A, V_A), i}^\vee \rightarrow i_*(A^\vee \otimes K_C) \rightarrow 0$$

dalla quale si ha subito che

$$\begin{cases} \text{rk}(E_{C,(A,V_A),i}) = \dim V_A, \\ c_1(E_{C,A,V_A}) = c_1(i_*(A^\vee \otimes K_C)) = [C], \\ c_2(E_{C,A,V_A}) = c_2(i_*(A^\vee \otimes K_C)) = C^2 - \deg(A^\vee \otimes K_C) = \deg(A), \\ \text{ch}_2(E_{C,(A,V_A),i}) = \text{ch}_2(i_*(A^\vee \otimes K_C)) = (g_C - 1) - \deg(A), \\ \lambda(E_{C,(A,V_A),i}) = (g_C - 1) - \dim V_A \text{ch}_2(E_{C,(A,V_A),i}). \end{cases}$$

nel caso in cui la serie lineare sia completa, $V_A = H^0(C, A)$, si scrive $E_{C,A,i}$ al posto di $E_{C,(A,V_A),i}$ e si ha la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^0(C, A)^\vee \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow E_{C,A,i} \longrightarrow i_*(A^\vee \otimes K_C) \longrightarrow 0$$

con $\text{rk}(E_{C,A,i}) = \dim |A| + 1$.

LEMMA. 1.3. *Nelle notazioni della costruzione qui sopra, si ha che*

$$h^2(X, E_{C,(A,V_A),i}) = 0;$$

inoltre, nel caso in cui $V_A = H^0(C, A)$, c'è una successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(C, A)^\vee \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^0(X, E_{C,A,i}) & \longrightarrow & H^0(C, A^\vee \otimes K_C) \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & H^0(C, A)^\vee \otimes H^1(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^1(X, E_{C,A,i}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Scrivendo la successione lunga di coomologia indotta dalla successione esatta che definisce $E_{C,(A,V_A),i}$, dal momento che l'applicazione tra $H^1(X, i_*(A^\vee \otimes K_C))$ e $H^2(X, V_A^\vee \otimes \mathcal{O}_X)$ è, per costruzione, suriettiva, si ottiene la prima parte dell'enunciato; se, inoltre, $V_A = H^0(C, A)$, allora la suddetta applicazione è un isomorfismo.

Q.E.D.

L'osservazione seguente, insieme con l'osservazione 1.11, descrive in che modo la non regolarità della superficie abeliana con la quale abbiamo a che fare sia di ostacolo al funzionamento del metodo proposto da Lazarsfeld e funzionante per una superficie di tipo $K3$.

OSSERVAZIONE. 1.4. Nella costruzione precedente si utilizza solamente il fatto che $K_X = \mathcal{O}_X$, di conseguenza, la costruzione funziona, così come esposta, anche per superfici di tipo $K3$; anche il lemma 1.3. continua a valere per superfici $K3$ e dalla successione esatta enunciata nel lemma, dato che una superficie $K3$ è regolare, ossia, ha $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, si deduce che un fascio $E_{C,A,i}$ associato ad un fibrato lineare A senza punti base su C soddisfa $h^1(X, E_{C,A,i}) = 0$. Questo non è necessariamente vero su di una superficie abeliana e costituisce il principale ostacolo all'estensione del metodo funzionante sulle superfici $K3$. È possibile fornire degli esempi espliciti di fasci $E_{C,A,i}$ con $h^1(X, E_{C,A,i}) > 0$.

OSSERVAZIONE. 1.5. Si consideri il fascio $E_{C,A,i}$ associato ad una serie lineare completa A su una curva liscia C in X ; sarà utile nel seguito avere osservato che

$$\lambda(E_{C,A,i}) = \rho(A) + (\text{rk}(E_{C,A,i})^2 - 1) ;$$

infatti,

$$\begin{aligned} \lambda(E_{C,A,i}) &= \\ &= h^0(C, A) d - (h^0(C, A) - 1)(g_C - 1) = h^0(C, A) (d - (g_C - 1)) + (g_C - 1) = \\ &= h^0(C, A) \chi_C(A) + (g_C - 1) = h^0(C, A)^2 - h^0(C, A) h^1(C, A) + (g_C - 1) = \\ &= \rho(A) + (h^0(C, A)^2 - 1) = \rho(A) + (\text{rk}(E_{C,A,i})^2 - 1) . \end{aligned}$$

In particolare, si ha $\rho(A) \geq 0$ quando $\lambda(E_{C,A,i}) \geq \text{rk}(E_{C,A,i})^2 - 1$, ovvero, nel caso in cui sia

$$\chi_X(E_{C,A,i}) \leq \frac{(g_C - 1)}{\text{rk}(E_{C,A,i})} - \frac{\text{rk}(E_{C,A,i})^2 - 1}{\text{rk}(E_{C,A,i})} \in \mathbb{Z} .$$

Nel seguito viene chiarito il ruolo dei fibrati $E_{C,A,i}$ nello sviluppo di una strategia per una dimostrazione della congettura di Petri.

LEMMA. 1.6. Se C è una curva liscia su X e A è un fibrato lineare senza punti base su di essa, se con $ev_{C,A} : H^0(C, A) \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow A$ si denota il morfismo suriettivo di valutazione delle sezioni di A , c'è una successione esatta di fasci localmente liberi su C :

$$0 \longrightarrow (\ker ev_{C,A})^\vee \longrightarrow E_{C,A,i}|_C \longrightarrow A^\vee \otimes K_C \longrightarrow 0 .$$

DIMOSTRAZIONE. Se C è una curva liscia su X e A è un fibrato lineare senza punti base su di essa, il fibrato vettoriale $E_{C,A,i}^\vee$ è stato definito come il nucleo dell'estensione su X del morfismo $ev_{C,A} : H^0(C, A) \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow A$; resta quindi indotto un morfismo suriettivo $E_{C,A,i}^\vee|_C \longrightarrow \ker ev_{C,A}$ di fasci su C il cui nucleo, dato che $\text{rk}(\ker ev_{C,A}) = h^0(C, A) - 1 = \text{rk}(E_{C,A,i}) - 1$, è un fibrato lineare su C con determinante uguale a $\det(E_{C,A,i}^\vee|_C) \otimes \det(\ker ev_{C,A})^\vee = N_{C/X}^\vee \otimes A$; c'è quindi una successione esatta di fasci localmente liberi su C

$$0 \longrightarrow A \otimes N_{C/X}^\vee \longrightarrow E_{C,A,i}^\vee|_C \longrightarrow \ker ev_{C,A} \longrightarrow 0 ;$$

dualizzando questa successione esatta e tenendo conto che $N_{C/X} = K_C$ si ottiene quanto enunciato.

Q.E.D.

OSSERVAZIONE. 1.7. Sia C una curva algebrica e A un fibrato lineare senza punti base su di essa; se $\ker ev_{C,A}$ denota il nucleo dell'applicazione $ev_{C,A} : H^0(C, A) \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow A$ di valutazione delle sezioni di A su C allora si ha che

$$\ker \mu_0(C, A) = H^0(C, \ker ev_{C,A} \otimes (A^\vee \otimes K_C))$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente applicare il funtore $- \otimes (A^\vee \otimes K_C)$ alla successione esatta $0 \longrightarrow \ker ev_{C,A} \longrightarrow H^0(C, A) \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow A \longrightarrow 0$ e poi prendere la coomologia della successione ottenuta per poter scrivere una successione esatta lunga che comincia con

$$0 \rightarrow H^0(C, \ker ev_{C,A} \otimes (A^\vee \otimes K_C)) \rightarrow H^0(C, A) \otimes H^0(C, A^\vee \otimes K_C) \rightarrow H^0(C, K_C) \rightarrow$$

e dove l'ultima freccia nel diagramma è l'applicazione $\mu_0(C, A)$.

Q.E.D.

Nella costruzione che segue viene descritta una situazione infinitesimale che è la parte fondamentale di questo metodo.

COSTRUZIONE. Sia C una curva liscia su X e A un fibrato lineare senza punti base su di essa; si consideri la successione esatta enunciata nella tesi del lemma 1.6.; applicando il funtore $\text{Hom}(-, A^\vee \otimes K_C)$ si ha

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{End}(A^\vee \otimes K_C) \longrightarrow \text{Hom}(E_{C,A,i}|_C, A^\vee \otimes K_C) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \text{Hom}((\ker ev_{C,A})^\vee, A^\vee \otimes K_C) \longrightarrow \text{Ext}^1(A^\vee \otimes K_C, A^\vee \otimes K_C) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \text{Ext}^1(E_{C,A,i}|_C, A^\vee \otimes K_C) \longrightarrow \text{Ext}^1((\ker ev_{C,A})^\vee, A^\vee \otimes K_C) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

che può essere riscritta come

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \text{Hom}(E_{C,A,i}|_C, A^\vee \otimes K_C) \longrightarrow \ker \mu_0(C, A) \xrightarrow{\delta(C,A)} \\ &\longrightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow \text{Ext}^1(E_{C,A,i}|_C, A^\vee \otimes K_C) \rightarrow \text{Ext}^1((\ker ev_{C,A})^\vee, A^\vee \otimes K_C) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

evidenziando l'applicazione di cobordo

$$\delta(C, A) : \ker \mu_0(C, A) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) .$$

Si consideri ora un intorno U_C della curva C nel suo schema di Hilbert e, per ogni $r \in \mathbb{N}^*$ e $d \in \mathbb{N}^*$ fissati, si consideri la varietà relativa $W_d^r(U_C)$ fibrata su U_C da un morfismo $\pi_d^r : W_d^r(U_C) \longrightarrow U_C$ che, su ogni curva $[C'] \in U_C$ ha per fibra la varietà dei divisori speciali $W_d^r(C')$.

Per ogni curva $C' \in U_C$ e ogni fibrato lineare senza punti base A' su C' con $h^0(C', A') = r + 1$ e grado d , sia

$$d\pi_{d(C', A')}^r : T_{(C', A')} (W_d^r(U_C)) \longrightarrow T_{C'}(U_C) = H^0(C', K_{C'})$$

il differenziale del morfismo π_d^r nel punto (C', A') .

La seguente proposizione si trova dimostrata in [Pa].

PROPOSIZIONE. 1.8. *Con la notazione sopra introdotta, se A è un fibrato lineare senza punti base su C con $h^0(C, A) = r + 1$ e grado d si ha che $\text{im } d\pi_{d(C, A)}^r \subseteq \text{ann}(\text{im } \delta(C, A))$; in particolare, se l'applicazione $\delta(C, A)$ è iniettiva, allora $\ker \mu_0(C, A) \neq 0$ se e soltanto se $d\pi_{d(C, A)}^r$ non è suriettiva.*

OSSERVAZIONE. Al fine di giustificare intuitivamente la proposizione 1.8., si osservi che c'è una interpretazione geometrica precisa dei termini della successione esatta a inizio pagina. Se con $p_d^r : P_d^r(U_C) \longrightarrow U_C$ si denota la varietà relativa delle successioni esatte

$$0 \longrightarrow h^0(C, A)^\vee \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow E_{C, A, i} \longrightarrow A^\vee \otimes K_C \longrightarrow 0$$

su una curva $[C] \in U_C$ formate dalle trasformazioni elementari di un fibrato lineare A senza punti base di $h^0(C, A) = r + 1$ e grado d su C , allora lo spazio $\text{Ext}^1(E_{C, A, i}|_C, A^\vee \otimes K_C)$ si identifica con lo spazio cotangente a $P_d^r(U_C)$ in un suo punto (C, A) mentre lo spazio $\text{Ext}^1((\ker \text{ev}_{C, A})^\vee, A^\vee \otimes K_C)$ si identifica con lo spazio cotangente lungo la fibra di p_d^r su una curva C lungo un suo punto A . Con queste notazioni la successione esatta presentata nella costruzione precedente può essere ancora riscritta come

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \text{Hom}(E_{C, A, i}|_C, A^\vee \otimes K_C) & \longrightarrow & \ker \mu_0(C, A) \xrightarrow{\delta(C, A)} \\ & & & & \xrightarrow{dp_{d(C, A)}^{r, \vee}} & & \\ & \longrightarrow & T_C(U_C)^\vee & \longrightarrow & T_{(C, A)}(P_d^r(U_C))^\vee & \longrightarrow & T_A(P_d^r(C))^\vee \longrightarrow 0 \end{array}$$

È ora chiaro che, se l'applicazione $\delta(C, A)$ è iniettiva, allora, $\ker \mu_0(C, A) = \ker dp_{d(C, A)}^{r, \vee}$ e di conseguenza, $\ker \mu_0(C, A) \neq 0$ se e soltanto se $dp_{d(C, A)}^r$ non è suriettiva. In ultimo, resta da osservare che la varietà $P_d^r(U_C)$ è un $PGL(r + 1)$ -fibrato principale sulla sottovarietà di $W_d^r(U_C)$ formata dai fibrati lineari A senza punti base con $h^0(C, A) = r + 1$ e grado d la cui fibra sono le differenti basi per $H^0(C, A)$.

Il lemma di Sard permette di dedurre dalla proposizione 1.8. il seguente corollario.

COROLLARIO. 1.9. *Siano fissati $r \in \mathbb{N}^*$ e $d \in \mathbb{N}^*$; se, per ogni curva liscia $C \in |H|$ e ogni fibrato lineare A senza punti base con $h^0(C, A) = r + 1$ e grado d , l'applicazione*

$\delta(C, A)$ descritta nella costruzione precedente è iniettiva, allora sulla generica curva liscia $C \in |H|$ l'applicazione $\mu_0(C, A)$ è iniettiva per ogni fibrato lineare A senza punti base con $h^0(C, A) = r + 1$ e grado d .

Il corollario verrà mostrato attraverso il seguente lemma, del quale, nei due paragrafi che seguono, ci si preoccuperà di mostrare le ipotesi.

LEMMA. 1.10. Siano fissati $r \in \mathbb{N}^*$ e $d \in \mathbb{N}^*$; sia $C \in |H|$ una curva liscia e A un fibrato lineare senza punti base con $h^0(C, A) = r + 1$ e grado d ; l'applicazione $\delta(C, A)$ è iniettiva, se e soltanto se

$$\text{hom}(E_{C,A,i}|_C, A^\vee \otimes K_C) = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente considerare la successione esatta nella costruzione a p. 11 per osservare che

$$\dim \ker \delta(C, A) = \text{hom}(E_{C,A,i}|_C, A^\vee \otimes K_C) - 1.$$

Q.E.D.

OSSERVAZIONE. 1.11. Applicando il funtore $\text{Hom}(E_{C,A,i}, -)$ alla successione esatta che definisce il fibrato $E_{C,A,i}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Hom}(E_{C,A,i}, E_{C,A,i}) \longrightarrow \text{Hom}(E_{C,A,i}, i_*(A^\vee \otimes K_C)) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^0(C, A) \otimes \text{Ext}^1(E_{C,A,i}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \text{Ext}^1(E_{C,A,i}, E_{C,A,i}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \text{Ext}^1(E_{C,A,i}, i_*(A^\vee \otimes K_C)) \longrightarrow H^0(C, A) \otimes \text{Ext}^2(E_{C,A,i}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \text{Ext}^2(E_{C,A,i}, E_{C,A,i}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

in particolare, se $h^1(X, E_{C,A,i}) = 0$, allora si ha che

$$\text{end}(E_{C,A,i}) = \text{hom}(E_{C,A,i}, i_*(A^\vee \otimes K_C));$$

se, inoltre, $E_{C,A,i}$ è un fascio semplice, si ha anche che $\text{hom}(E_{C,A,i}, i_*(A^\vee \otimes K_C)) = 1$; lo scopo di questo lavoro è, in un certo senso, di mostrare che questo accade anche quando $h^1(X, E_{C,A,i}) > 0$.

2. Risultati di non esistenza

In questo paragrafo si mostra una condizione di non esistenza per i fibrati lineari su ogni curva liscia $C \in |H|$ leggermente più debole della condizione di non esistenza di Brill-Noether, della quale, peraltro, si mostra la validità sulla curva generica in molti casi. L'idea non è dissimile da quella sfruttata da I. Reider [R], ad esempio: utilizzare la disuguaglianza di Bogomolov per forzare la realizzazione di determinate condizioni numeriche.

DEFINIZIONE. Per ogni fascio coerente E privo di torsione su X si pone

$$\mu_H(E) := \frac{c_1(E) \cdot H}{\text{rk}(E)};$$

un fascio coerente E su X si dice μ_H -semistabile (risp. μ_H -stabile) se è privo di torsione e, per ogni sottofascio coerente $E' \subseteq E$ tale che $\text{rk}(E') < \text{rk}(E)$, si ha che $\mu(E') \leq \mu(E)$ (risp. $\mu(E') < \mu(E)$).

Qui di seguito vengono elencate alcune delle più importanti proprietà dei fasci stabili, per la validità delle quali si rimanda a [HL], e che saranno utilizzate nelle dimostrazioni contenute in questo paragrafo e nel seguente.

PROPOSIZIONE.

- un fascio μ_H -stabile è semplice, ovvero, i suoi unici endomorfismi non nulli sono gli automorfismi scalari;

- se E e F sono due fasci μ_H -semistabili su X , e $f: E \rightarrow F$ è un morfismo non nullo, allora deve essere $\mu(E) \leq \mu(F)$; inoltre, se $\mu(E) = \mu(F)$, nel caso in cui E sia μ_H -stabile, f è iniettiva e, nel caso in cui F sia μ_H -stabile, f è generalmente suriettiva;

- per ogni fascio E privo di torsione su X che sia μ_H -instabile, è possibile scegliere un quoziente destabilizzante $E \rightarrow Q$, ossia, un quoziente tale che $\text{rk}(Q) < \text{rk}(E)$ e $\mu(Q) < \mu(E)$, in modo che il fascio Q sia μ_H -stabile.

Per disuguaglianza di Bogomolov si intende la proposizione seguente.

PROPOSIZIONE. Sia E un fascio coerente privo di torsione su X e sia

$$\Delta(E) := 2 \text{rk}(E) c_2(E) - (\text{rk}(E) - 1) c_1(E)^2 \in \mathbb{Z}$$

il suo discriminante; se E è un fascio μ_H -stabile, allora deve essere $\Delta(E) \geq 0$.

Una delle osservazioni fondamentali contenute nel lavoro di Lazarsfeld è la seguente: per ogni curva C su una superficie di tipo $K3$ e ogni endomorfismo non scalare di un $E_{C,A,i}$ si può costruire una curva linearmente equivalente alla curva C che ne contenga una riducibile oppure multipla; di conseguenza, se si ha a che fare con un sistema lineare di curve irriducibili e ridotte, come è il caso di un sistema lineare H su di una superficie in cui $\text{NS}(X) = \mathbb{Z}c_1(H)$, si ha a che fare con dei fasci $E_{C,A,i}$ che sono semplici; quello che viene dimostrato nella proposizione seguente è un risultato analogo e più preciso.

PROPOSIZIONE. 2.1. *Se si considera una curva liscia $C \in |H|$, e un fibrato lineare A senza punti base su C , allora il fibrato $E_{C,A,i}$ è μ_H -stabile e, in particolare, semplice.*

DIMOSTRAZIONE. Innanzi tutto, dal momento che $c_1(E_{C,A,i}) = c_1(H)$ genera il $\text{NS}(X)$, il fascio $E_{C,A,i}$ non può essere strettamente μ_H -semistabile. Se $E_{C,A,i}$ fosse un fascio μ_H -instabile, si potrebbe certamente scegliere un suo quoziente $E_{C,A,i} \longrightarrow Q$ di modo che Q sia un fascio privo di torsione e μ_H -stabile, di rango $\text{rk}(Q) < \text{rk}(E_{C,A,i})$ e con $\mu(Q) < \mu(E_{C,A,i})$; componendo l'immersione di $H^0(C, A)^\vee \otimes \mathcal{O}_X$ in $E_{C,A,i}$ con la proiezione di quest'ultimo su Q , si ottiene un morfismo $\varphi: H^0(C, A)^\vee \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow Q$.

Il morfismo φ è non nullo: se lo fosse, la proiezione di $E_{C,A,i}$ su Q indurrebbe un morfismo non nullo $i_*(A^\vee \otimes K_C) \longrightarrow Q$, la cui esistenza è resa impossibile dal fatto che Q è un fascio privo di torsione.

$H^0(C, A)^\vee \otimes \mathcal{O}_X$ è un fascio μ_H -semistabile e Q un fascio μ_H -stabile per ipotesi, quindi deve essere $\mu(H^0(C, A)^\vee \otimes \mathcal{O}_X) \leq \mu(Q)$; $\mu(Q)$ è dunque compreso tra $0 = \mu(H^0(C, A)^\vee \otimes \mathcal{O}_X)$ e $\mu(E)$: $0 \leq \mu(Q) < \mu(E)$; scrivendo $c_1(Q) = n_Q c_1(H)$, con $n_Q \in \mathbb{Z}$, e moltiplicando le disuguaglianze per $\text{rk}(Q)$, si ha che $0 \leq n_Q H^2 < (\text{rk}(Q)/\text{rk}(E)) H^2 < H^2$; quindi deve essere $n_Q = 0$, ovvero, $\mu(Q) = 0 = \mu(H^0(C, A)^\vee \otimes \mathcal{O}_X)$.

Si consideri ora $\text{im } \varphi$: è un sottofascio di Q e come tale è privo di torsione, inoltre, $\mu(\text{im } \varphi) = 0$ dato che è anche un quoziente di $H^0(C, A)^\vee \otimes \mathcal{O}_X$; essendo $\text{im } \varphi$ un quoziente privo di torsione di un fascio omogeneo con $c_1(\text{im } \varphi) = 0$, per la proposizione 4.15., è anch'esso un fascio omogeneo su X e, in particolare, è un fascio localmente libero; nella successione esatta

$$0 \longrightarrow \text{im } \varphi \longrightarrow Q \longrightarrow \text{coker } \varphi \longrightarrow 0,$$

$c_1(\text{coker } \varphi) = 0$, quindi $\text{coker } \varphi$ potrebbe essere un fascio di torsione supportato su un numero finito di punti di X , ma, $\text{im } \varphi$ è un fascio localmente libero, quindi $\text{coker } \varphi = 0$. $\varphi: H^0(C, A)^\vee \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow Q$ è un morfismo suriettivo e Q è un fascio omogeneo su X .

Certamente, $h^0(X, Q) \neq 0$, quindi, per una proprietà dei fasci omogenei su una superficie abeliana presentata nel corollario 4.13., si ha anche $h^2(X, Q) \neq 0$; ora, la proiezione

$E_{C,A,i} \longrightarrow Q$ induce una suriezione $H^2(X, E_{C,A,i}) \longrightarrow H^2(X, Q)$, quindi si ha

$$h^2(X, E_{C,A,i}) \geq h^2(X, Q) > 0,$$

che contraddice il fatto che $h^2(X, E_{C,A,i})$ sia nullo.

Q.E.D.

La proposizione precedente porta con sé un primo risultato di non esistenza di certi fibrati lineari A su una curva liscia $C \in |H|$.

COROLLARIO. 2.2. *Per ogni curva liscia $C \in |H|$ e ogni fibrato lineare A senza punti base su C deve essere*

$$\rho(A) \geq - (h^0(C, A)^2 - 1) = \dim |A| (\dim |A| + 2),$$

ovvero

$$\deg(A) \geq \left(1 - \frac{1}{h^0(C, A)}\right) (g_C - 1).$$

DIMOSTRAZIONE. Per la μ_H -stabilità di $E_{C,A,i}$ deve essere verificata la disuguaglianza di Bogomolov che si scrive $0 \leq \Delta(E_{C,A,i}) = 2\lambda(E_{C,A,i})$; ora, è sufficiente sostituire in questa espressione le varie forme dell'invariante di Mukai $\lambda(E_{C,A,i})$ descritte nell'osservazione 1.1. per ottenere le stime equivalenti enunciate.

Q.E.D.

OSSERVAZIONE. La stima presentata nel corollario precedente valida per ogni curva liscia nel sistema lineare $|H|$ non è lontana da quanto si mostrerà essere valido per la generica curva liscia in $|H|$: nel caso in cui $h^0(C, A) = 2$, si ha che $\deg(A) \geq \frac{1}{2}g_C - \frac{1}{2}$ per ogni curva liscia $C \in |H|$, mentre, si mostrerà che $\deg(A) \geq \frac{1}{2}g_C + 1$ per la generica $C \in |H|$. Inoltre, ci si aspetta che la stima enunciata nel corollario 1.2. sia la migliore possibile, ovvero, che esistano curve in $|H|$ sulle quali sia realizzata l'uguaglianza.

Da questo momento si suppone di avere a che fare con una curva liscia $C \in |H|$. La proposizione seguente permetterà di migliorare il risultato di non esistenza per la generica curva liscia $C \in |H|$. Inoltre, sarà anche usata e riformulata nel seguito.

PROPOSIZIONE. 2.3. *Se $\chi_X(E_{C,A,i}) > 0$, allora*

$$\{\alpha \in \text{Pic}^0(X) : h^1(X, E_{C,A,i} \otimes \alpha) > 0\}$$

è un insieme finito di cardinalità al più $[\lambda(E_{C,A,i})/\chi_X(E_{C,A,i})]$.

DIMOSTRAZIONE. Innanzi tutto, si osservi che, per ogni $\alpha \in \text{Pic}^0(X)$, si ha

$$H^1(X, E_{C,A,i} \otimes \alpha) = H^1(X, E_{C,A,i}^\vee \otimes \alpha^\vee)^\vee = \text{Ext}^1(E_{C,A,i}, \alpha^\vee);$$

sia ora I un insieme di indici per i punti $\alpha_i \in \text{Pic}^0(X)$ che hanno la proprietà che $\text{Ext}^1(E_{C,A,i}, \alpha_i^\vee) \neq 0$; la tesi è che I è un insieme finito. Per ogni sottoinsieme finito $J \subset I$, si consideri il fascio $N_J := \bigoplus_{i \in J} \alpha_i$ e una estensione $[F] \in \text{Ext}^1(E_{C,A,i}, N_J)$; si ha che $\text{rk}(N_J) = |J|$, $c_1(N_J) = 0$ e $\chi_X(N_J) = 0$, quindi $\text{rk}(F) = \text{rk}(E_{C,A,i}) + |J|$, $c_1(F) = c_1(E_{C,A,i})$ e $\chi_X(F) = \chi_X(E_{C,A,i})$; inoltre,

$$\begin{aligned} \lambda(F) &= \frac{1}{2} \left(c_1(E_{C,A,i})^2 - 2(\text{rk}(E_{C,A,i}) + |J|) \chi_X(F) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(c_1(E_{C,A,i})^2 - 2 \text{rk}(E_{C,A,i}) \chi_X(F) - 2|J| \chi_X(E_{C,A,i}) \right) = \\ &= \lambda(E_{C,A,i}) - |J| \chi_X(E_{C,A,i}) \end{aligned}$$

dove $\lambda(F) \in \mathbb{Z}$, dato che $\lambda(E_{C,A,i}) \in \mathbb{Z}$. L'osservazione è che, se esiste una estensione F che è un fascio μ_H -stabile, allora deve essere $\lambda(F) \geq 0$, oppure, equivalentemente, $|J| \chi_X(E_{C,A,i}) \leq \lambda(E)$; quindi, dato che stiamo supponendo $\chi_X(E_{C,A,i}) > 0$, deve essere che $|J| \leq \lambda(E) / \chi_X(E_{C,A,i})$; la cardinalità dei sottoinsiemi finiti di I è dunque limitata a priori dagli invarianti numerici di $E_{C,A,i}$, quindi I è un insieme finito.

Mostriamo ora che esiste una estensione stabile $[F] \in \text{Ext}^1(E_{C,A,i}, N_J)$; si ragiona induttivamente sulla cardinalità dell'insieme J .

Nel caso in cui $|J| = 1$, ogni estensione non banale $[F] \in \text{Ext}^1(E_{C,A,i}, N_J)$ è un fascio μ_H -stabile; una tale estensione non può certamente essere strettamente μ_H -semistabile, dato che $c_1(F) = c_1(H)$ genera il $\text{NS}(X)$; se F fosse μ_H -instabile, si consideri un quoziente $F \longrightarrow Q$ privo di torsione che sia μ_H -stabile con $\mu(Q) < \mu(F)$ e $\text{rk}(Q) < \text{rk}(F)$; sia $f: N_J \longrightarrow Q$ l'applicazione ottenuta componendo l'inclusione di N_J in F con la proiezione di F su Q ; f è non nulla: nel caso contrario, resterebbe indotta una applicazione non nulla $E_{C,A,i} \longrightarrow Q$, in cui entrambi i fasci sono μ_H -stabili e in cui $\mu(E) > \mu(F) > \mu(Q)$, dato che $\text{rk}(F) = \text{rk}(E) + 1$ e $c_1(F) = c_1(E)$, che è impossibile che esista.

Ora, dato che $N_J = \alpha_i$, per qualche $i \in I$, e Q sono entrambi fasci μ_H -stabili, e esiste una applicazione non nulla $f: N_J \longrightarrow Q$ tra loro, deve essere $0 = \mu(N_J) \leq \mu(Q)$; ma, se si scrive $c_1(Q) = n_Q c_1(H)$, $n_Q \in \mathbb{Z}$, e si moltiplicano le disuguaglianze $0 = \mu(N_J) \leq \mu(Q) < \mu(F)$ per $\text{rk}(Q)$ si ottiene che $0 = \mu(N_J) \leq n_Q H^2 < (\text{rk}(Q) / \text{rk}(F)) H^2 < H^2$ che forza $n_Q = 0$, ovvero, $\mu(Q) = 0$. In questo caso, dato che $\mu(N_J) = \mu(Q)$, l'applicazione f è iniettiva con conucleo di torsione: $0 \longrightarrow N_J \longrightarrow Q \longrightarrow \text{coker } f \longrightarrow 0$ con $c_1(\text{coker } f) = 0$; $\text{coker } f$ è dunque supportato su un sottoschema 0-dimensionale di lunghezza finita e f è un isomorfismo in codimensione 1; ora, dato che N_J è un fascio localmente libero e Q è privo di torsione, f deve essere un isomorfismo tra N_J e Q ; questo si vede anche dal fatto che $\text{Ext}^1(\text{coker } f, N_J) = \text{Ext}^1(N_J, \text{coker } f) = H^1(X, N_J^\vee \otimes \text{coker } f) = 0$, dato che $\dim \text{supp}(\text{coker } f) = 0$; in conclusione, si è ottenuto che la composizione della proiezione

da F su Q con l'inverso dell'isomorfismo f è un morfismo da F a N_J che spezza la successione esatta di partenza, contro l'ipotesi che F sia una estensione non banale.

Vediamo ora che quanto è stato appena dimostrato è sufficiente a costruire una estensione stabile per ogni cardinalità di $|J|$; scelto un elemento $\bar{i} \in J$, sia J' il sottoinsieme di J ottenuto togliendo questo elemento; si consideri una estensione $F_{J'} \in \text{Ext}^1(E_{C,A,i}, N_{J'})$ che sia un fascio μ_H -stabile e si formi un digramma del tipo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \alpha_{\bar{i}} & \xlongequal{\quad} & \alpha_{\bar{i}} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & N_J & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E_{C,A,i} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & N_{J'} & \longrightarrow & F_{J'} & \longrightarrow & E_{C,A,i} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

che è ottenuto per mezzo dell'applicazione $\text{Ext}^1(E_{C,A,i}, N_J) \longrightarrow \text{Ext}^1(E_{C,A,i}, N_{J'})$, che è suriettiva dato che la successione esatta $0 \longrightarrow \alpha_{\bar{i}} \longrightarrow N_J \longrightarrow N_{J'} \longrightarrow 0$ è spezzata, sollevando l'elemento $F_{J'}$ ad una estensione non banale $[F] \in \text{Ext}^1(F_{J'}, \alpha_{\bar{i}})$, che esiste perché, dato che

$$\text{hom}(N_{J'}, \alpha_{\bar{i}}) = 0 = \text{ext}^1(N_{J'}, \alpha_{\bar{i}}),$$

si ha che $0 \neq \text{ext}^1(E_{C,A,i}, \alpha_{\bar{i}}) = \text{ext}^1(F_{J'}, \alpha_{\bar{i}})$ per ipotesi; ora, la stessa dimostrazione appena fornita per il caso in cui $|J| = 1$ mostra che anche F è un fascio stabile.

Q.E.D.

COROLLARIO. 2.4. Se $\text{deg}(A) < (g_C - 1)$, allora per

$$\text{deg}(A) < \left(1 - \frac{1}{h^0(C, A) + 1}\right) (g_C - 1)$$

si ha che $h^1(X, E_{C,A,i} \otimes \alpha) = 0$ per ogni $\alpha \in \text{Pic}^0(X)$; in particolare, per questi valori di $\text{deg}(A)$ si ha che $h^1(X, E_{C,A,i}) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. La stima enunciata sui valori di $\text{deg}(A)$ è equivalente alla condizione che $[\lambda(E_{C,A,i})/\chi_X(E_{C,A,i})] < 1$; dalla proposizione 2.3. si ha la tesi.

Q.E.D.

COROLLARIO. 2.5. Per la generica curva $C \in |H|$ e per ogni scelta di $r \in \mathbb{N}^*$ e $d \in \mathbb{Z}$ tali che

$$d < \left(1 - \frac{1}{r+2}\right) (g_C - 1),$$

l'applicazione $\mu_0(C, A)$ associata ad ogni fibrato lineare A senza punti base su C con $h^0(C, A) = r + 1$ di grado d è iniettiva.

DIMOSTRAZIONE. Segue dall'osservazione 1.11. e dalla proposizione 2.1.

Q.E.D.

PROPOSIZIONE. 2.6. Per la generica curva $C \in |H|$, se la dimensione $r \in \mathbb{N}^*$ soddisfa la condizione

$$g_C \geq (r + 1) ((r + 1)(r + 2) - 1),$$

allora, per ogni $d \in \mathbb{N}$ tale che $\rho(g_C, r, d) = g_C - (r + 1)(g_C - d + r) < 0$, non esistono fibrati lineari con $h^0(C, A) = r + 1$ e grado d su C .

DIMOSTRAZIONE. Si tratta di vedere sotto quali ipotesi numeriche sul genere g_C la disuguaglianza $\rho(g_C, r, d) < 0$ implica la disuguaglianza del corollario 2.4; la disuguaglianza $\rho(g_C, r, d) < 0$ si può riscrivere come

$$d < \left(1 - \frac{1}{r + 1}\right) g_C + r;$$

ora, nel caso in cui $d < (g_C - 1)$, si verifica subito che

$$\left(1 - \frac{1}{r + 1}\right) g_C + r \leq \left(1 - \frac{1}{r + 2}\right) (g_C - 1)$$

solamente nel caso in cui g_C soddisfi la stima enunciata, mentre, nel caso in cui $d = g_C - 1$, $\rho(g_C, d, r) = g_C - (r + 1)^2$, che è quindi certamente positivo nel caso in cui g_C soddisfi la stima nell'enunciato.

Q.E.D.

3. Proprietà di Petri

Come è stato spiegato nel primo paragrafo, la strategia qui seguita per una dimostrazione della validità della proprietà di Petri per la curva generica nel sistema lineare H è essenzialmente quella di mostrare indipendentemente che si ha

$$\text{hom}(E_{C,A,i}, i_*(A^\vee \otimes K_C)) = 1 = \text{end}(E_{C,A,i})$$

per ogni scelta di un fibrato lineare A senza punti base su una curva C .

Con questo fine, il lemma e la proposizione che seguono iniziano lo studio dei morfismi da $E_{C,A,i}$ a $i_*(A^\vee \otimes K_C)$, sfruttando solamente la μ_H -stabilità del fibrato $E_{C,A,i}$.

LEMMA. *Se $C \in |H|$ è una curva liscia con un fibrato lineare A senza punti base su di essa, L è un fibrato lineare su C e $\varphi: E_{C,A,i} \longrightarrow i_*L$ un morfismo suriettivo, allora $\ker \varphi$ è un fibrato μ_H -semistabile.*

DIMOSTRAZIONE. Il fascio $\ker \varphi$ è un fascio localmente libero di rango $\text{rk}(E_{C,A,i})$ e $c_1(\ker \varphi) = 0$, dato che $c_1(i_*L) = [C] = c_1(E_{C,A,i})$ (per le proprietà basilari delle trasformazioni elementari, cfr. [F], Cap. 2, Lemma 16, p. 41); sia ora K un suo sottofascio con $\text{rk}(K) < \text{rk}(\ker \varphi)$; K è anche un sottofascio di $E_{C,A,i}$, che è un fascio μ_H -stabile, quindi deve essere $\mu(K) < \mu(E_{C,A,i})$, con $\text{rk}(K) < \text{rk}(\ker \varphi) < \text{rk}(E_{C,A,i})$; ponendo $c_1(K) = n_K c_1(H)$, con $n_K \in \mathbb{Z}$, e moltiplicando per $\text{rk}(K)$ la disuguaglianza $\mu(K) < \mu(E)$ si ottiene $n_K H^2 < (\text{rk}(K) / \text{rk}(E_{C,A,i})) H^2 < H^2$, quindi $n_K \leq 0$, ovvero, che $\mu(K) \leq 0 = \mu(\ker \varphi)$.

Q.E.D.

PROPOSIZIONE. 3.1. *Se $C \in |H|$ è una curva liscia e A è un fibrato lineare senza punti base su C , allora ogni morfismo in $\text{Hom}(E_{C,A,i}, i_*(A^\vee \otimes K_C))$ è suriettivo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varphi: E_{C,A,i} \longrightarrow i_*(A^\vee \otimes K_C)$; $\text{im } \varphi$ è un fascio supportato sull'immagine dell'immersione i , privo di torsione e quindi localmente libero su di essa e di rango 1: $\text{im } \varphi = i_*L$, per qualche fibrato lineare L su C inserito in una successione esatta del tipo $0 \longrightarrow L \longrightarrow A^\vee \otimes K_C \longrightarrow P \longrightarrow 0$, dove P è un fascio di torsione su C , quindi supportato su di un numero finito di punti della curva; dualizzando si ottiene $0 \longrightarrow A \otimes K_C^\vee \longrightarrow L^\vee \longrightarrow \text{Ext}^1(P, \mathcal{O}_C) \longrightarrow 0$, poi, tensorizzando per K_C , si ha $0 \longrightarrow A \longrightarrow L^\vee \otimes K_C \longrightarrow \text{Ext}^1(P, \mathcal{O}_C) \otimes K_C \longrightarrow 0$, dove il fascio $\text{Ext}^1(P, \mathcal{O}_C) \otimes K_C$ è un fascio di torsione supportato su di un numero finito di punti di C .

Dualizzando la successione esatta $0 \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow E_{C,A,i} \longrightarrow i_* L \longrightarrow 0$, si ottiene la successione $0 \longrightarrow E_{C,A,i}^\vee \longrightarrow (\ker \varphi)^\vee \longrightarrow i_* (L^\vee \otimes K_C) \longrightarrow 0$; ora, applicando a quest'ultima il funtore $\text{Hom}(i_* A, -)$ si ottiene, dato che $\text{Hom}(i_* A, \ker \varphi) = 0$, una applicazione iniettiva

$$\text{Hom}(i_* A, i_* (L^\vee \otimes K_C)) \longrightarrow \text{Ext}^1(i_* A, E_{C,A,i}^\vee) ;$$

l'immagine $[F]$ dell'immersione $i_* A \longrightarrow i_* (L^\vee \otimes K_C)$ per la precedente applicazione è descritta dal seguente diagramma di pullback:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & E_{C,A,i}^\vee & \longrightarrow & F & \longrightarrow & i_* A \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & E_{C,A,i}^\vee & \longrightarrow & (\ker \varphi)^\vee & \longrightarrow & i_* (L^\vee \otimes K_C) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \text{Ext}^1(P, \mathcal{O}_C) \otimes K_C & = & \text{Ext}^1(P, \mathcal{O}_C) \otimes K_C \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

per costruzione del fascio $E_{C,A,i}$, si ha $c_2(E_{C,A,i}) = \text{deg}(A)$, quindi $c_2(F) = c_2(E_{C,A,i}) + c_2(i_* A) + c_1(E_{C,A,i}^\vee) \cdot c_1(i_* A) = \text{deg}(A) + (C^2 - \text{deg}(A)) - C^2 = 0$; di conseguenza,

$$c_2(\ker \varphi) = c_2(F) + c_2(\text{Ext}^1(P, \mathcal{O}_C) \otimes K_C) = -\text{length}(\text{Ext}^1(P, \mathcal{O}_C) \otimes K_C) ;$$

ma, dato che $\ker \varphi$ è un fascio μ_H -semistabile, la disuguaglianza di Bogomolov (cfr. Proposizione a p. 14) forza il suo discriminante $\Delta(\ker \varphi) := 2 \text{rk}(\varphi) c_2(\ker \varphi) - (\text{rk}(\ker \varphi) - 1) c_1(\ker \varphi)$ ad essere non negativo, ovvero, dato che $\text{rk}(\ker \varphi) > 0$ e $c_1(\ker \varphi) = 0$, deve essere $c_2(\ker \varphi) \geq 0$; questo implica che $\text{length}(\text{Ext}^1(P, \mathcal{O}_C) \otimes K_C) = 0$ e quindi la tesi.

Q.E.D.

Qui di seguito viene illustrato l'approccio al problema; più precisamente, quello che si mostrerà è che, per ogni curva liscia $C \in |H|$ e per ogni fibrato lineare A senza punti base su C di grado $\text{deg}(A) \neq g_C - 1$, una volta che si è costruito il fibrato $E_{C,A,i}$ e si è ottenuto un morfismo canonico

$$E_{C,A,i} \longrightarrow i_* (A^\vee \otimes K_C) ,$$

ogni altro morfismo da $E_{C,A,i}$ su $i_* (A^\vee \otimes K_C)$ è ottenuto dal morfismo canonico tramite la composizione con un endomorfismo di $E_{C,A,i}$; dal momento che, come mostrato nella

proposizione 2.1., il fibrato $E_{C,A,i}$ è semplice, si ha che $\text{hom}(E_{C,A,i}, i_*(A^\vee \otimes K_C)) = 1 = \text{end}(E_{C,A,i})$, ovvero, per il lemma 1.10., che sono soddisfatte le ipotesi del corollario 1.9. e quindi vale la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE. 3.2. *Sulla generica curva liscia $C \in |H|$, per ogni $r \in \mathbb{N}^*$ e $d \in \mathbb{N}^*$ con $d \neq g_C - 1$, l'applicazione $\mu_0(C, A)$ associata ad ogni fibrato lineare A senza punti base su C con $h^0(C, A) = r + 1$ e grado $\text{deg}(A) = d$ è iniettiva.*

Questa proposizione è dedotta come Corollario 3.16. dalla Proposizione 3.15. alla fine di questo paragrafo.

Ora, si tratta di capire quali sono i fibrati vettoriali che possono apparire come nucleo di un morfismo

$$\varphi: E_{C,A,i} \longrightarrow i_*(A^\vee \otimes K_C),$$

dopodiché, cercare di escluderne la coesistenza con il nucleo $H^0(C, A)^\vee \otimes \mathcal{O}_X$ canonicamente definito in $E_{C,A,i}$ dalla sua costruzione. La proposizione seguente restringe il campo alla classe dei fasci omogenei su X , che è una classe di fasci nota e completamente classificata (cfr. teorema 4.11.).

PROPOSIZIONE. 3.3. *Sia $C \in |H|$ una curva liscia e A un fibrato lineare senza punti base su C ; se $\varphi \in \text{Hom}(E_{C,A,i}, i_*(A^\vee \otimes K_C))$, allora $\ker \varphi$ è un fascio omogeneo.*

DIMOSTRAZIONE. Dato che $c_i(\ker \varphi) = 0$, $i = 1, 2$, si ha che $\lambda(\ker \varphi) = 0$; per la proposizione 4.14. $\ker \varphi$ è un fascio semi-omogeneo; ma, $\det(\ker \varphi) = \mathcal{O}_X$ e, per la proposizione 4.6., un fascio semi-omogeneo con determinante banale è omogeneo.

Q.E.D.

A questo punto, si consideri fissata una curva liscia $C \in |H|$ insieme con una serie lineare completa senza punti base A su di essa e un morfismo $\varphi \in \text{Hom}(E_{C,A,i}, i_*(A^\vee \otimes K_C))$ scrivendo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow E_{C,A,i} \longrightarrow i_*(A^\vee \otimes K_C) \longrightarrow 0$$

che esso determina; l'idea è di considerare la trasformazione di Fourier-Mukai di una tale successione esatta, sfruttando il fatto che le trasformazioni di Fourier-Mukai dei fasci omogenei sono note (cfr. teorema 4.9. e proposizione 4.10.); dato che $R^0 S(\ker \varphi) = 0 = R^1 S(\ker \varphi)$, applicando il funtore di trasformazione di Fourier-Mukai, si ottiene

$$R^0 S(E_{C,A,i}) = R^0 S(i_*(A^\vee \otimes K_C))$$

insieme con una successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{R}^1 \mathcal{S}(E_{C,A,i}) & \longrightarrow & \mathbf{R}^1 \mathcal{S}(i_*(A^\vee \otimes K_C)) & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \mathcal{S}(\ker \varphi) \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow 0 \end{array}$$

dove, naturalmente, si ha che $\mathbf{R}^2 \mathcal{S}(i_*(A^\vee \otimes K_C)) = 0$ per ragioni dimensionali.

Per proseguire, bisogna almeno farsi un'idea di come sono fatti i fasci $\mathbf{R}^i \mathcal{S}(E_{C,A,i})$, per $i = 0, 1, 2$; sono ovviamente legati ai fasci $\mathbf{R}^i \mathcal{S}(E_{C,A,i}^\vee)$, $i = 0, 1, 2$, anche se per questi ultimi la situazione risulterà più semplice. A questo scopo, è utile introdurre qualche notazione.

NOTAZIONE. Per $k = 0, 1, 2$, si pone

$$\Psi^k(E_{C,A,i}) := \{\alpha \in \text{Pic}^0(X) : H^k(X, E_{C,A,i} \otimes \alpha) \neq 0\}.$$

$h^0(X, E_{C,A,i}) > h^0(C, A)$, quindi $\Psi^0(E_{C,A,i})$ contiene sempre l'elemento $\mathcal{O}_X \in \text{Pic}^0(X)$; naturalmente, $\text{supp}(\mathbf{R}^k \mathcal{S}(E_{C,A,i})) \subseteq \Psi^k(E_{C,A,i})$, per $k = 0, 1, 2$.

Una prima osservazione è la seguente.

LEMMA. 3.4. Si ha che $\Psi^2(E_{C,A,i}) = \emptyset$; in particolare, $\mathbf{R}^2 \mathcal{S}(E_{C,A,i}) = 0$; in modo analogo, si ha che $\mathbf{R}^0 \mathcal{S}(E_{C,A,i}^\vee) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per dualità di Serre, si ha che

$$H^2(X, E_{C,A,i} \otimes \alpha) = \text{Ext}^2(\alpha^\vee, E_{C,A,i}) = \text{Hom}(E_{C,A,i}, \alpha^\vee)^\vee;$$

ora, essendo $E_{C,A,i}$ e $\alpha^\vee$ fasci μ_H -stabili con $\mu(E_{C,A,i}) = H^2/\text{rk}(E_{C,A,i}) > 0 = \mu(\alpha^\vee)$, non può esserci alcun morfismo non nullo da $E_{C,A,i}$ a $\alpha^\vee$.

Q.E.D.

Quindi, per ogni $\varphi \in \text{Hom}(E_{C,A,i}, i_*(A^\vee \otimes K_C))$ si ottiene che $\mathbf{R}^0 \mathcal{S}(\ker \varphi) = 0 = \mathbf{R}^1 \mathcal{S}(\ker \varphi)$ e, insieme, una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}^1 \mathcal{S}(E_{C,A,i}) \longrightarrow \mathbf{R}^1 \mathcal{S}(i_*(A^\vee \otimes K_C)) \longrightarrow \mathbf{R}^2 \mathcal{S}(\ker \varphi) \longrightarrow 0.$$

OSSERVAZIONE. Per il lemma 3.3., dal teorema del cambiamento di base (cfr. [H] Cap. III, Teorema 12.11.) si ottiene che, per ogni $\alpha \in \text{Pic}^0(X)$,

$$\mathbf{R}^1 \mathcal{S}(E_{C,A,i}) \otimes \mathbb{C}(\alpha) = H^1(X, E_{C,A,i} \otimes \alpha);$$

se, inoltre, succede che, intorno ad un punto $\bar{\alpha} \in \text{Pic}^0(X)$ il fascio $R^1 S(E_{C,A,i})$ è localmente libero, allora, per ogni $\alpha \in \text{Pic}^0(X)$ intorno a $\bar{\alpha}$ si ha anche che

$$R^0 S(E_{C,A,i}) \otimes \mathbb{C}(\alpha) = H^0(X, E_{C,A,i} \otimes \alpha);$$

in particolare, se $\Psi^1(E_{C,A,i})$ è un sottoinsieme proprio di $\text{Pic}^0(X)$, nel suo complementare $R^0 S(E_{C,A,i})$ è un fascio localmente libero di fibra $H^0(X, E_{C,A,i} \otimes \alpha)$.

Il teorema del cambiamento di base non assicura che la fibra di $R^0 S(E_{C,A,i})$ su α sia isomorfa a $H^0(X, E_{C,A,i} \otimes \alpha)$ per ogni $\alpha \in \text{Pic}^0(X)$, anzi, può succedere, come si vedrà qui di seguito, che la fibra di $R^0 S(E_{C,A,i})$ su qualche $\alpha \in \text{Pic}^0(X)$ sia un sottospazio di $H^0(X, E_{C,A,i} \otimes \alpha)$.

Per $R^i S(E_{C,A,i})$, $i = 0, 1$, e per $R^i S(E_{C,A,i}^\vee)$, $i = 1, 2$, la situazione è più complessa: sia per $E_{C,A,i}$ che per $E_{C,A,i}^\vee$ uno dei due fasci derivati può essere nullo oppure di torsione a seconda dei caratteri numerici del fascio $E_{C,A,i}$. Ad ogni modo, dato che il fascio $E_{C,A,i}$ è certamente non nullo, non può essere che i fasci $R^i S(E_{C,A,i})$, $i = 0, 1, 2$, siano tutti nulli.

OSSERVAZIONE. Se il supporto del fascio $\Psi^1(E_{C,A,i})$ è propriamente contenuto nel supporto di $\Psi^0(E_{C,A,i})$, si ha che $\chi_X(E_{C,A,i}) > 0$: esiste almeno un $\alpha \in \Psi^0(E_{C,A,i})$ che non appartenga a $\Psi^1(E_{C,A,i})$; per questo α si ottiene che $\chi_X(E_{C,A,i}) = \chi_X(E_{C,A,i} \otimes \alpha) = h^0(X, E_{C,A,i} \otimes \alpha) > 0$. Viceversa, se il supporto del fascio $\Psi^0(E_{C,A,i})$ è propriamente contenuto nel supporto di $\Psi^1(E_{C,A,i})$, si ha che $\chi_X(E_{C,A,i}) < 0$; in particolare, si ha che $\chi_X(E_{C,A,i}) = 0$ se e soltanto se $\Psi^0(E_{C,A,i}) = \Psi^1(E_{C,A,i})$.

LEMMA. Un fascio F privo di torsione su di una superficie S soddisfa $\text{Ext}^2(F, \mathcal{O}_X) = 0$; inoltre, $\text{Ext}^1(F, \mathcal{O}_X)$ è supportato in codimensione 2 e si ha che $\text{Ext}^1(F, \mathcal{O}_X) = 0$ se e soltanto se il fascio F è localmente libero.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri la successione esatta canonica

$$0 \longrightarrow \text{tors}(F) \longrightarrow F \longrightarrow F^{\vee\vee} \longrightarrow Q_F \longrightarrow 0$$

dove $\text{tors}(F)$ è il sottofascio di torsione di F e Q_F un quoziente canonico; F è privo di torsione se e soltanto se $\text{tors}(F) = 0$ e il morfismo canonico $F \longrightarrow F^{\vee\vee}$ è iniettivo. In questo caso, applicando il funtore $\text{Hom}(-, \mathcal{O}_X)$, e tenendo conto che Q_F è supportato in codimensione 2 e quindi soddisfa $\text{Ext}^i(Q_F, \mathcal{O}_X) = 0$ per $i = 0, 1$, si ottiene che $\text{Ext}^1(F, \mathcal{O}_X) = \text{Ext}^2(Q_F, \mathcal{O}_X)$ e che $0 = \text{Ext}^2(F^{\vee\vee}, \mathcal{O}_X) = \text{Ext}^2(F, \mathcal{O}_X)$.

Q.E.D.

PROPOSIZIONE. 3.5. In generale, si ha che

- $\mathbf{R}^0 S(E_{C,A,i})$ è un fascio localmente libero su $\text{Pic}^0(X)$,
- $\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}^\vee) = \mathcal{H}om(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)})$ e, in particolare, è anch'esso un fascio localmente libero,
- c 'è una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) \longrightarrow \mathbf{R}^2 S(E_{C,A,i}^\vee) \longrightarrow \mathbf{R}^0 S(E_{C,A,i})^\vee \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathcal{E}xt^2(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) \longrightarrow 0$$

DIMOSTRAZIONE. Innanzi tutto, dato che il fascio $E_{C,A,i}$ è privo di torsione su X , per la proposizione 4.16., anche il fascio $\mathbf{R}^0 S(E_{C,A,i})$ è privo di torsione su $\text{Pic}^0(X)$; ora, per la proposizione 4.17., al fascio $E_{C,A,i}$ sono associate due successioni spettrali:

$$\begin{cases} A_2^{p,q} = \mathbf{R}^p S(\mathcal{E}xt^{q+2}(E_{C,A,i}, \mathcal{O}_X)) & ((p,q) \in \{0,1,2\} \times \{0,-1,-2\}) \\ B_2^{p,q} = \mathcal{E}xt^{p+2}(\mathbf{R}^{2-q} S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) & ((p,q) \in \{0,-1,-2\} \times \{0,1,2\}) \end{cases}$$

che hanno lo stesso limite E_∞^k , $k \in \mathbb{Z}$, $k = -2 \dots 2$ (la notazione utilizzata per le successioni spettrali è quella presentata in [Gro] cap. III, paragrafo 11, p. 367 e seguenti); dal momento che $E_{C,A,i}$ è un fascio localmente libero, si ha che $\mathcal{E}xt^i(E_{C,A,i}, \mathcal{O}_X) = 0$, per $i = 1, 2$, quindi nella successione spettrale $A_2^{p,q}$ sono non nulli soltanto i termini $A_2^{p,-2} = \mathbf{R}^p S(\mathcal{H}om(E_{C,A,i}, \mathcal{O}_X))$, dove $p = 0, 1, 2$; tutti i differenziali in questa successione spettrale sono quindi necessariamente nulli e dunque la successione $A_2^{p,q}$ è già degenerata al livello 2, ottenendo che $E_\infty^k = \mathbf{R}^{k+2} S(\mathcal{H}om(E_{C,A,i}, \mathcal{O}_X))$, per $k = -2, -1, 0$ e che $E_\infty^k = 0$ altrimenti.

La successione spettrale $B_2^{p,q}$ è solo di poco più complessa; dato che $\mathbf{R}^2 S(E_{C,A,i})$ è nullo, i soli suoi termini non nulli sono $B_2^{p,1} = \mathcal{E}xt^{p+2}(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)})$, e $B_2^{p,2} = \mathcal{E}xt^{p+2}(\mathbf{R}^0 S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)})$, per $p = -2, -1, 0$; l'unico differenziale non nullo è da $B_2^{-2,2}$ a $B_2^{0,1}$ e si scrive

$$d: \mathcal{H}om(\mathbf{R}^0 S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^2(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) ;$$

la successione $B_2^{p,q}$ degenera quindi al livello 3 e si ha che

$$\begin{cases} E_\infty^{-2} = 0, \\ E_\infty^{-1} = \mathcal{H}om(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) , \\ E_\infty^0 = \mathcal{E}xt^2(\mathbf{R}^0 S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) ; \end{cases}$$

inoltre, i suoi limiti in grado 0 e 1 sono inseriti nelle successioni esatte

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) \longrightarrow E_\infty^0 \longrightarrow \ker d \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \text{coker } d \longrightarrow E_\infty^1 \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathbf{R}^0 S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Ora, sappiamo dalla convergenza della successione $A_2^{p,q}$ che i termini E_∞^k , $k = 1, 2$, sono nulli; ne segue che, $\text{Ext}^i(\mathbf{R}^0 S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) = 0$, per $i = 1, 2$, ovvero, che il fascio $\mathbf{R}^0 S(E_{C,A,i})$ è localmente libero; similmente, confrontando i termini E_∞^{-1} si ottiene la seconda parte di quanto enunciato; infine, coker $d = 0$ equivale a dire che l'applicazione d è suriettiva e, sostituendo il termine E_∞^0 con quello ottenuto dalla convergenza della successione spettrale $A_2^{p,q}$, si ottiene la successione esatta lunga nell'enunciato.

Q.E.D.

Ragionando in modo del tutto simile, si può dimostrare la stessa proposizione per i fasci $\mathbf{R}^i S(i_*(A^\vee \otimes K_C))$, $i = 0, 1$ che viene qui di seguito solamente enunciata.

PROPOSIZIONE. *In generale, si ha che*

- $\mathbf{R}^0 S(i_*(A^\vee \otimes K_C))$ è un fascio localmente libero su $\text{Pic}^0(X)$,
- $\mathbf{R}^1 S(i_*(A)) = \text{Hom}(\mathbf{R}^1 S(i_*(A^\vee \otimes K_C)), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)})$ e, in particolare, è localmente libero,
- c'è una successione esatta

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(\mathbf{R}^1 S(i_*(A^\vee \otimes K_C)), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) \longrightarrow \mathbf{R}^1 S(i_*(A)) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathbf{R}^0 S(i_*(A^\vee \otimes K_C))^\vee \longrightarrow \text{Ext}^2(\mathbf{R}^1 S(i_*(A^\vee \otimes K_C)), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) \rightarrow 0$$

È utile enunciare qualche corollario della prima di queste proposizioni che sarà usato poco più avanti.

COROLLARIO. 3.6. $E_{C,A,i}^\vee$ soddisfa debolmente il teorema dell'indice con indice 2, ovvero, $\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}^\vee) = 0$, se e soltanto se $\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i})$ è un fascio di torsione su $\text{Pic}^0(X)$.

COROLLARIO. 3.7. Se il fascio $\mathbf{R}^0 S(E_{C,A,i})$ è nullo, allora si ha anche che

$$\begin{cases} \text{Ext}^2(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) = 0, \\ \mathbf{R}^2 S(E_{C,A,i}^\vee) = \text{Ext}^1(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) \end{cases}$$

di modo che, se $\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i})$ è privo di torsione su $\text{Pic}^0(X)$, allora $\mathbf{R}^2 S(E_{C,A,i}^\vee)$ è supportato in codimensione 2 su $\text{Pic}^0(X)$.

COROLLARIO. 3.8. Se $\Psi^0(E_{C,A,i})$ propriamente contenuto in $\text{Pic}^0(X)$, allora il fascio $\mathbf{R}^0 S(E_{C,A,i})$ è nullo e $E_{C,A,i}$ soddisfa debolmente il teorema dell'indice con indice 1; in particolare, ne segue che $\chi_X(E_{C,A,i}) = -\text{rk}(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i})) \leq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché il fascio $\mathbf{R}^0 S(E_{C,A,i})$ è localmente libero e quindi privo di torsione su $\text{Pic}^0(X)$ il suo supporto deve coincidere con tutto $\text{Pic}^0(X)$.

Q.E.D.

La proposizione seguente fornisce una precisazione di quest'ultimo corollario.

PROPOSIZIONE. 3.9. Se $\Psi^0(E_{C,A,i})$ è un insieme finito, il fascio $\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i})$ è privo di torsione su $\text{Pic}^0(X)$; in particolare, $\chi_X(E_{C,A,i}) = -\text{rk}(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i})) < 0$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\Psi^0(E_{C,A,i})$ è un insieme finito, allora $\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i})$ è un fascio localmente libero su $\text{Pic}^0(X)$ fuori da questo insieme finito di punti; si consideri il suo sottofascio di torsione $\text{tors}(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}))$: è un fascio supportato su di un numero finito di punti di $\text{Pic}^0(X)$ e certamente si ha che $\mathbf{R}^0 \widehat{S}(\text{tors}(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i})))$ è immerso in $\mathbf{R}^0 \widehat{S}(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}))$; un fascio di torsione il cui supporto ha dimensione 0 evidentemente soddisfa il teorema dell'indice in maniera forte con indice 0 e quindi, il fascio $\mathbf{R}^0 \widehat{S}(\text{tors}(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i})))$ è un fascio di rango uguale a $\chi_X(\text{tors}(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}))) = \text{length}(\text{tors}(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i})))$; ora, $E_{C,A,i}$ soddisfa debolmente il teorema dell'indice con indice 1, anche $\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i})$ ha la stessa proprietà con il medesimo indice: quindi si ha $\mathbf{R}^0 \widehat{S}(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i})) = 0$ e, in particolare, $\mathbf{R}^0 \widehat{S}(\text{tors}(\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}))) = 0$; si ottiene dunque che il fascio $\mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i})$ è privo di torsione su $\text{Pic}^0(X)$.

Q.E.D.

Il lemma seguente, dovuto a Mukai, permette di ragionare per induzione sul rango di $E_{C,A,i}$.

LEMMA. Per ogni sottofascio omogeneo M di $E_{C,A,i}$ con $\text{rk}(M) < \text{rk}(E_{C,A,i})$, il quoziente $E_{C,A,i}/M$ è un fascio privo di torsione su X .

DIMOSTRAZIONE. Sia M un sottofascio omogeneo in $E_{C,A,i}$ con $\text{rk}(M) < \text{rk}(E_{C,A,i})$; se con $\text{tors}(E_{C,A,i}/M)$ si denota il sottofascio di torsione di $E_{C,A,i}/M$, resta indotto un diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & \text{tors}(E_{C,A,i}/M) \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E_{C,A,i} & \longrightarrow & E_{C,A,i}/M \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & E_{C,A,i}/M' & \xlongequal{\quad} & E_{C,A,i}/M' \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

dove $c_1(M') = c_1(M) + c_1(\text{tors}(E_{C,A,i}/M)) = c_1(\text{tors}(E_{C,A,i}/M))$, con $\text{rk}(M') = \text{rk}(M)$; scrivendo $c_1(\text{tors}(E_{C,A,i}/M)) = n c_1(H)$, con $n \in \mathbb{N}$ dato che $c_1(\text{tors}(E_{C,A,i}/M))$

è un divisore effettivo su X , il fatto che $E_{C,A,i}$ sia supposto μ_H -semistabile implica $\mu(m') \leq \mu(E_{C,A,i})$, quindi, moltiplicando per $\text{rk}(M')$, che $n \leq (\text{rk}(M')/\text{rk}(E_{C,A,i})) < 1$; quindi si ottiene che $c_1(\text{tors}(E_{C,A,i}/M)) = 0$ e $\text{tors}(E_{C,A,i}/M)$ è un fascio di torsione supportato in codimensione 2 su di un numero finito di punti di X , ma, dato che il fascio M è localmente libero, $\text{tors}(E_{C,A,i}/M)$ deve avere lunghezza nulla.

Q.E.D.

PROPOSIZIONE. 3.10. $\Psi^0(E_{C,A,i})$ è un insieme finito se e soltanto se $\Psi^0(\det(E_{C,A,i}))$ lo è.

DIMOSTRAZIONE. Si scelga un sottospazio V di dimensione $h^0(C, A) - 1$ in $H^0(C, A)^\vee$ e si formi la successione esatta

$$0 \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow E_{C,A,i} \longrightarrow \det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z \longrightarrow 0 ;$$

dove $|Z| = c_2(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z) = c_2(E_{C,A,i})$ e $\chi_X(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z) = \chi_X(E_{C,A,i})$; per ogni $\alpha \in \text{Pic}^0(X)$, si ha che $H^0(X, E_{C,A,i} \otimes \alpha) = \text{Hom}(\alpha^\vee, E_{C,A,i})$; è chiaro che un morfismo $\alpha^\vee \longrightarrow E_{C,A,i}$ non può sollevarsi ad un morfismo $\alpha \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_X$, dato che $0 = H^2(X, \alpha) = \text{Hom}(\alpha, \mathcal{O}_X)$, e quindi induce necessariamente un morfismo non nullo $\alpha \longrightarrow \det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z$; si ha $\Psi^0(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z) = \Psi^0(E_{C,A,i}) \cup \{\mathcal{O}_X\}$ e quindi la tesi.

Q.E.D.

OSSERVAZIONE. Se si applica il funtore trasformazione di Fourier-Mukai alla successione esatta precedente, si ottiene che $\mathbf{R}^0 S(E_{C,A,i}) = \mathbf{R}^0 S(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z)$ e che $0 = \mathbf{R}^2 S(E_{C,A,i}) = \mathbf{R}^2 S(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z)$ insieme con una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}^1 S(E_{C,A,i}) \longrightarrow \mathbf{R}^1 S(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z) \longrightarrow \mathbf{R}^2 S(V \otimes \mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

dove $\mathbf{R}^2 S(V \otimes \mathcal{O}_X)$ è un fascio di torsione supportato sull'origine di $\text{Pic}^0(X)$ e di lunghezza $h^0(C, A) - 1$.

PROPOSIZIONE. 3.11. $\chi_X(E_{C,A,i}) < 0$ se e soltanto se $\Psi^0(E_{C,A,i})$ è un insieme finito.

DIMOSTRAZIONE. Il 'se' è il contenuto della proposizione 3.10.; per la proposizione 3.11. qui sopra e il lemma che la precede, si può assumere che $E_{C,A,i}$ sia un fascio privo di torsione di rango 1 su X e quindi necessariamente della forma $\mathcal{O}_X(C) \otimes I_Z$, per qualche sottoschema 0-dimensionale Z di X .

Si procede ora seguendo la stessa linea di dimostrazione della proposizione 2.3.; innanzi tutto, si osservi che per ogni $\alpha \in \text{Pic}^0(X)$ si ha

$$H^0(X, E_{C,A,i} \otimes \alpha) = \text{Hom}(\alpha^\vee, E_{C,A,i}) ;$$

sia I un insieme di indici per i punti di $\alpha_i \in \text{Pic}^0(X)$ che hanno la proprietà di avere $\text{Hom}(\alpha_i^\vee, E_{C,A,i}) > 0$; la tesi è che I è un insieme finito.

Per ogni sottoinsieme finito $J \subset I$, si consideri il fascio omogeneo $N_J := \bigoplus_{i \in J} \alpha_i$ e un morfismo $\varphi : N_J \longrightarrow \det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z$ che sia non banale su ciascuna componente, ovvero, tale che $\varphi|_{\alpha_i}$ sia non nullo per ogni $i \in J$; il morfismo φ è suriettivo in codimensione 1 e c'è una successione esatta lunga

$$0 \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow N_J \longrightarrow \det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi \longrightarrow 0$$

Se con ψ si indica il morfismo suriettivo tra $\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z$ e $\operatorname{coker} \varphi$, allora $\ker \psi$ è un fascio privo di torsione di rango 1 su X ; se si avesse $c_1(\ker \psi)$, allora, per un risultato elementare sui fasci omogenei, $\ker \psi$ dovrebbe essere un fascio omogeneo anch'esso, coincidendo con $\alpha_{\bar{i}}$, per qualche $\bar{i} \in J$; in questo modo, si avrebbe che φ è nulla sugli altri α_i con $i \in J$, $i \neq \bar{i}$, e allora, o $|J| = 1$ oppure si è contro alle ipotesi fatte sul morfismo φ . Deve quindi essere che $c_1(\ker \psi) = c_1(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z)$ e che $\ker \psi = \mathcal{O}_X(C) \otimes I_{Z'}$, per qualche sottoschema 0-dimensionale Z' che contiene Z ; così si ha anche che $c_1(\ker \varphi) = -c_1(\ker \psi) = -[C]$. Per il resto si ha che $\operatorname{rk}(\ker \varphi) = |J| - 1$ e che $\operatorname{ch}_2(\ker \varphi) = -\operatorname{ch}_2(\ker \psi) = \operatorname{ch}_2(\operatorname{coker} \varphi) - \operatorname{ch}_2(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z)$ dove $\operatorname{ch}_2(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z) < 0$ per ipotesi e $\operatorname{ch}_2(\operatorname{coker} \varphi) \geq 0$; calcolando si ottiene che

$$\begin{aligned} \lambda(\ker \varphi) &= \frac{1}{2} c_1(\ker \varphi)^2 - \operatorname{rk}(\ker \varphi) \operatorname{ch}_2(\ker \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} c_1(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z) - (|J| - 1) \operatorname{ch}_2(\operatorname{coker} \varphi) - \operatorname{ch}_2(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z) = \\ &= \lambda(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z) + |J| \operatorname{ch}_2(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z) - (|J| - 1) \operatorname{ch}_2(\operatorname{coker} \varphi) \leq \\ &= \lambda(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z) + |J| \operatorname{ch}_2(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z). \end{aligned}$$

Ora, per ottenere una stima su $|J|$, l'idea è di mostrare che $\ker \varphi$ è μ_H -stabile: in questo modo, deve $\lambda(\ker \varphi) \geq 0$ e quindi

$$|J| (-\operatorname{ch}_2(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z)) \leq \lambda(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z)$$

dove $-\operatorname{ch}_2(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z) > 0$ per ipotesi e $\lambda(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z) > 0$ per la μ_H -semistabilità di $\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z$.

Il fascio $\ker \varphi$ non può essere strettamente μ_H -semistabile, dato che $-c_1(\ker \varphi)$ è il generatore del $\operatorname{NS}(X)$; sia dunque K un sottofascio destabilizzante per $\ker \varphi$ con $\operatorname{rk}(K) < \operatorname{rk}(\ker \varphi)$; il fascio K è anche un sottofascio di N_J ; essendo quest'ultimo un fascio omogeneo e quindi μ_H -semistabile, deve essere $\mu(K) \leq \mu(N_J) = 0$. Scrivendo $c_1(K) = n_k c_1(H)$ con $n_k \in \mathbb{Z}$, $n_k \leq 0$, e moltiplicando la disuguaglianza $\mu(\ker \varphi) < \mu(K) \leq 0$ per $\operatorname{rk}(K)$, si trova che $-1 < (\operatorname{rk}(K)/\operatorname{rk}(\ker \varphi)) < n_k \leq 0$ e quindi che $n_k = 0 = \mu(K)$. Ma se $c_1(K) = 0$, allora K è un sottofascio omogeneo di N_J e quindi contiene almeno un $\alpha_{\bar{i}}$ per qualche $\bar{i} \in J$ che è a sua volta contenuto in $\ker \varphi$ contro le ipotesi fatte sul morfismo φ .

Q.E.D.

LEMMA. Se $\Psi^k(E_{C,A,i})$, $k = 0, 1$, sono entrambi propriamente contenuti in $\text{Pic}^0(X)$, allora sono entrambi infiniti e $\chi_X(E_{C,A,i}) = 0$; in particolare, se $\Psi^0(E_{C,A,i})$ è un insieme finito allora $\Psi^1(E_{C,A,i})$ coincide con tutto $\text{Pic}^0(X)$ e viceversa, se $\Psi^1(E_{C,A,i})$ è un insieme finito allora $\Psi^0(E_{C,A,i})$ coincide con tutto $\text{Pic}^0(X)$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\Psi^1(E_{C,A,i})$ è propriamente contenuto in $\text{Pic}^0(X)$ allora, il fascio $\mathbf{R}^1\mathcal{S}(E_{C,A,i})$ è di torsione, quindi, per quanto affermato nella proposizione precedente, $\Psi^0(E_{C,A,i})$ deve essere infinito; se anche $\Psi^0(E_{C,A,i})$ è propriamente contenuto in $\text{Pic}^0(X)$, $\chi_X(E_{C,A,i}) = 0$ e $\Psi^0(E_{C,A,i}) = \Psi^1(E_{C,A,i})$.

Q.E.D.

PROPOSIZIONE. 3.12. $\chi_X(E_{C,A,i}) > 0$ se e soltanto se $\Psi^1(E_{C,A,i})$ è un insieme finito; inoltre, per

$$\chi_X(E_{C,A,i}) > \frac{(g_C - 1)}{\text{rk}(E) + 1},$$

si ha $\mathbf{R}^1\mathcal{S}(E_{C,A,i}) = 0$ e il fascio $E_{C,A,i}$ soddisfa in maniera forte il teorema dell'indice con indice 0 e $\mathbf{R}^0\mathcal{S}(E_{C,A,i})$ è un fascio localmente libero di rango $\chi_X(E_{C,A,i})$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\Psi^1(E_{C,A,i})$ è un insieme finito, per il lemma precedente $\Psi^0(E_{C,A,i})$ coincide con tutto $\text{Pic}^0(X)$ e si deve avere $\chi_X(E_{C,A,i}) > 0$; l'altra direzione di implicazione insieme con la stima sono già state dimostrate nel paragrafo precedente.

Q.E.D.

Le proposizioni precedenti servono a mostrare che $\mathbf{R}^2\mathcal{S}(E_{C,A,i}^\vee)$, per $\chi_X(E_{C,A,i}) < 0$ e $\mathbf{R}^1\mathcal{S}(E_{C,A,i})$, per $\chi_X(E_{C,A,i}) > 0$ sono fasci di torsione supportati su di un numero finito di punti in $\text{Pic}^0(X)$; in realtà, nei ragionamenti che seguono, serve soltanto sapere che l'origine $[\mathcal{O}_X] \in \text{Pic}^0(X)$ è un punto isolato per il supporto di questi fasci.

LEMMA. 3.13. Si ha $\mathbf{R}^1\mathcal{S}(E_{C,A,i})^\vee = \mathbf{R}^1\mathcal{S}(i_*(A^\vee \otimes K_C))^\vee$ e una successione esatta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext}^1(\mathbf{R}^1\mathcal{S}(i_*(A^\vee \otimes K_C)), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) &\longrightarrow \text{Ext}^1(\mathbf{R}^1\mathcal{S}(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \text{Ext}^1(\mathbf{R}^2\mathcal{S}(\ker \varphi), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) \longrightarrow \text{Ext}^2(\mathbf{R}^1\mathcal{S}(i_*(A^\vee \otimes K_C)), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) \rightarrow \\ &\longrightarrow \text{Ext}^2(\mathbf{R}^1\mathcal{S}(E_{C,A,i}), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato è ottenuto applicando il funtore $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_X)$ alla successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}^1\mathcal{S}(E_{C,A,i}) \longrightarrow \mathbf{R}^1\mathcal{S}(i_*(A^\vee \otimes K_C)) \longrightarrow \mathbf{R}^2\mathcal{S}(\ker \varphi) \longrightarrow 0$$

e tenendo in conto che $\mathbf{R}^2\mathcal{S}(\ker \varphi)$ è un fascio supportato in codimensione 2 su $\text{Pic}^0(X)$, quindi che, come tale, ha $\text{Ext}^1(\mathbf{R}^2\mathcal{S}(\ker \varphi), \mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}) = 0$, per $i = 0, 1$.

Q.E.D.

in cui la differenza tra le lunghezze dei primi due fasci nell'origine in $\text{Pic}^0(X)$ è pari alla lunghezza del fascio $\mathbf{R}^2 S(\ker \varphi)$ nell'origine; ma $\text{length}(\mathbf{R}^2 S(\ker \varphi)) = h^0(C, A)$ e quindi $\mathbf{R}^2 S(\ker \varphi)$ è un fascio di torsione concentrato nell'origine di $\text{Pic}^0(X)$; per la proposizione 4.10. si ha la tesi.

• $[\chi_X(E_{C,A,i}) < 0]$ In questo caso è il fascio di torsione $\mathbf{R}^2 S(E_{C,A,i}^\vee)$ ad essere supportato su di un numero finito di punti in $\text{Pic}^0(X)$ e ad essere inserito in una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}^1 S(A) \longrightarrow \mathbf{R}^2 S(E_{C,A,i}^\vee) \longrightarrow \mathbf{R}^2 S(\ker \varphi) \longrightarrow 0$$

di fasci di lunghezza finita; si conclude con un ragionamento identico al precedente.

Q.E.D.

PROPOSIZIONE. 3.15. Sia $C \in |H|$ una curva liscia e A un fibrato lineare senza punti base su di essa; si consideri il morfismo suriettivo canonico $E_{C,A,i} \longrightarrow i_*(A^\vee \otimes K_C)$ definito dalla costruzione del fibrato $E_{C,A,i}$; se $\chi_X(E_{C,A,i}) > 0$, allora, per ogni scelta di un morfismo $\varphi \in \text{Hom}(E_{C,A,i}, i_*(A^\vee \otimes K_C))$, se $\ker \varphi$ è un fascio omogeneo su X che contiene un fascio unipotente, allora $\ker \varphi$ è un fascio banale su X di rango $h^0(C, A)$ e il morfismo φ è ottenuto dal morfismo canonico tramite composizione per un endomorfismo non nullo di $E_{C,A,i}$.

DIMOSTRAZIONE. Per la proposizione 4.12. e il corollario 4.13., la condizione che $\ker \varphi$ contenga un fascio unipotente è equivalente a quella che abbia ogni gruppo $H^i(X, \ker \varphi)$ non nullo; si consideri dunque un elemento in $H^2(X, \ker \varphi)$ che corrisponde, per dualità di Serre, ad un morfismo $\ker \varphi \longrightarrow \mathcal{O}_X$ e si formi il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \ker \varphi & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \text{sc} \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & E_{C,A,i} & \xrightarrow{f} & \det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & i_*(A^\vee \otimes K_C) & \equiv & i_*(A^\vee \otimes K_C) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

la colonna di sinistra del diagramma individua una estensione

$$[\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z] \in \text{Ext}^1(i_*(A^\vee \otimes K_C), \mathcal{O}_X) = H^0(C, A)$$

che corrisponde ad una sezione di A su C di cui Z è l'insieme degli zeri.

D'altra parte, per costruzione, ogni sezione di A su C può essere ottenuta con un diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & H^0(C, A)^\vee \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \scriptstyle{sc} \\
 0 & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & E_{C,A,i} & \xrightarrow{f'} & \det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & i_*(A^\vee \otimes K_C) & \equiv & i_*(A^\vee \otimes K_C) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

dove V è un iperpiano in $H^0(C, A)^\vee$, ossia, un punto di $H^0(C, A)$.

Lo scopo è di mostrare che $K = V \otimes \mathcal{O}_X$ e che i morfismi f e f' nei due diagrammi sono proporzionali e che, in particolare, definiscono la stessa classe di estensione in $\text{Ext}^1(\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z, V \otimes \mathcal{O}_X)$; dal momento che la curva

$$sc : \mathcal{O}_X \longrightarrow \det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z,$$

determinata dalla colonna di sinistra di entrambi i diagrammi, induce senz'altro tramite f' la classe di estensione banale $[H^0(C, A)^\vee \otimes \mathcal{O}_X] \in \text{Ext}^1(V \otimes \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$, osservando che tramite f deve definire la stessa classe di estensione, si conclude che $\ker \varphi$ è il fascio banale.

A questo scopo, l'idea è di applicare il funtore $\text{Hom}(E_{C,A,i}, -)$ alla successione esatta

$$0 \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow E_{C,A,i} \longrightarrow \det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z \longrightarrow 0$$

ottenendo che

$$0 \rightarrow \text{End}(E_{C,A,i}) \rightarrow \text{Hom}(E_{C,A,i}, \det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z) \rightarrow V \otimes \text{Ext}^1(E_{C,A,i}, \mathcal{O}_X) \rightarrow 0$$

si consideri l'immagine in $\text{Ext}^1(E_{C,A,i}, V \otimes \mathcal{O}_X)$ del morfismo f tra $E_{C,A,i}$ e $\det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z$ determinato dalla successione $0 \longrightarrow K \longrightarrow E_{C,A,i} \longrightarrow \det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z \longrightarrow 0$:

si può formare un diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & K & \xlongequal{\quad} & K & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & E^{(1)} & \xrightarrow{f^{(1)'}} & E_{C,A,i} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow f^{(1)} & & \downarrow f \\
 0 & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & E_{C,A,i} & \xrightarrow{f'} & \det(E_{C,A,i}) \otimes I_Z \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Se l'estensione $[E^{(1)}] \in \text{Ext}^1(E_{C,A,i}, V \otimes \mathcal{O}_X)$ è spezzata, cosa che succede di necessità solo quando $h^1(X, E_{C,A,i}) = 0$, allora uno dei due morfismi f oppure f' è ottenuto dall'altro tramite una composizione con un endomorfismo di $E_{C,A,i}$; essendo quest'ultimo necessariamente scalare, dato che $E_{C,A,i}$ è semplice, si deduce che i due morfismi f e f' sono proporzionali; in particolare, i loro due nuclei K e $V \otimes \mathcal{O}_X$ coincidono.

Nel caso in cui l'estensione $E^{(1)}$ non sia spezzata, cosa che può accadere soltanto quando $h^1(X, E_{C,A,i}) > 0$, si osserva che, per gli argomenti presentati nella dimostrazione della proposizione 2.3., $E^{(1)}$ deve essere della forma $\mathcal{O}_X^{\oplus h} \oplus E'$ dove $h \in \mathbb{N}$, $h < \dim V$ e $[E'] \in \text{Ext}^1(E_{C,A,i}, \mathcal{O}_X^{\oplus (\dim V - h)})$ è una estensione non banale che rappresenta un fascio localmente libero μ_H -stabile e quindi semplice; ora il morfismo $K \longrightarrow E^{(1)}$ si abbassa a $E_{C,A,i}$ quindi, dato che $\mathcal{O}_X^{\oplus h} \in \ker(E^{(1)} \longrightarrow E_{C,A,i})$, l'immagine del morfismo $K \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus h} \oplus E'$ deve essere contenuta in E' ; ma, in questo modo, il conucleo di questa applicazione iniettiva sarebbe spezzato in $\mathcal{O}_X^{\oplus h} \oplus \text{coker}(K \longrightarrow E')$ e non potrebbe essere isomorfo a $E_{C,A,i}$ che è un fascio semplice; si conclude che $h = 0$ e $E^{(1)} = E'$ è un fascio μ_H -stabile e quindi semplice.

Da osservare è che, per la μ_H -stabilità di $E^{(1)}$, deve essere $\lambda(E^{(1)}) \geq 0$; dato che $\text{rk}(E^{(1)}) = \text{rk}(E_{C,A,i}) + 1$ e $\text{ch}_i(E^{(1)}) = \text{ch}_i(E_{C,A,i})$, per $i = 1, 2$, si ha che

$$\lambda(E^{(1)}) = \frac{1}{2} c_1(E_{C,A,i}) - (\text{rk}(E_{C,A,i}) + 1) \text{ch}_2(E_{C,A,i}) = \lambda(E_{C,A,i}) - \text{ch}_2(E_{C,A,i});$$

quindi, affinché possa esistere un tale $E^{(1)}$ deve essere che $\lambda(E_{C,A,i}) \geq \text{ch}_2(E_{C,A,i})$.

Ora si può formare un nuovo diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & K & \xlongequal{\quad} & K & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & E^{(2)} & \xrightarrow{f^{(2)'}} & E^{(1)} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow f^{(2)} & & \downarrow f^{(1)} \\
 0 & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & E^{(1)} & \xrightarrow{f^{(1)'}} & E_{C,A,i} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

e iterare il ragionamento precedente osservando che, se $f^{(1)}$ e $f^{(1)'}$ sono proporzionali, allora lo sono anche f' e f e si può quindi concludere.

Questa iterazione dovrà terminare dopo un numero finito di passi: infatti, se $E^{(2)}$ è una estensione non banale, allora è un fascio μ_H -stabile e, come tale, avrà $\lambda(E^{(2)}) \geq 0$, dove

$$\lambda(E^{(2)}) = \lambda(E^{(1)}) - \text{ch}_2(E^{(1)}) = \lambda(E_{C,A,i}) - 2 \text{ch}_2(E_{C,A,i}) ;$$

quindi, è condizione necessaria affinché $E^{(2)}$ possa essere una estensione non banale, che si abbia $\lambda(E) \geq 2 \text{ch}_2(E_{C,A,i})$. Il processo di iterazione dovrà quindi arrestarsi al primo intero strettamente più grande di $\lambda(E_{C,A,i})/\text{ch}_2(E_{C,A,i})$.

Q.E.D.

OSSERVAZIONE. Segue immediatamente dal teorema 4.11. che, se $h^0(C, A)$ è dispari, per ogni $\varphi \in \text{Hom}(E_{C,A,i}, i_*(A^\vee \otimes K_C))$, $\ker \varphi$ contiene un fascio unipotente.

Il seguente corollario segue subito dalle proposizione 3.14. e 3.15.

COROLLARIO. 3.16. Sia $C \in |H|$ una curva liscia e A un fibrato lineare senza punti base su di essa; si consideri il morfismo suriettivo canonico $E_{C,A,i} \longrightarrow i_*(A^\vee \otimes K_C)$ definito dalla costruzione del fibrato $E_{C,A,i}$; se $\chi_X(E_{C,A,i}) > 0$, allora, per ogni scelta di un morfismo $\varphi \in \text{Hom}(E_{C,A,i}, i_*(A^\vee \otimes K_C))$, $\ker \varphi$ è un fascio banale su X di rango $h^0(C, A)$ e il morfismo φ è ottenuto dal morfismo canonico tramite composizione per un endomorfismo non nullo di $E_{C,A,i}$ ed è quindi proporzionale al morfismo canonico.

4. Fasci omogenei e trasformazione di Mukai

Quest'ultimo paragrafo contiene una breve introduzione alla trasformazione di Fourier-Mukai su una varietà abeliana. I risultati discussi sono contenuti, in forma più o meno esplicita, nei lavori di S. Mukai citati in bibliografia e sono qui enunciati senza dimostrazione al solo scopo di referenza per il testo.

NOTAZIONE. 4.1. Nel seguito si denota con X una varietà abeliana complessa e con $\widehat{X}$ la sua varietà abeliana duale, ossia, la componente neutra $\text{Pic}^0(X)$ del gruppo di Picard $\text{Pic}(X)$; con π_X e $\pi_{\widehat{X}}$ si indicano le proiezioni canoniche dal prodotto $X \times \widehat{X}$ su X e $\widehat{X}$, con -1_X l'isomorfismo di X che prende l'inverso di ogni suo elemento e con T_x^* o con T_α^* il funtore di traslazione associato ad un punto $x \in X$ o $\alpha \in \widehat{X}$.

Con $\mathcal{P}$ si denota un fibrato universale o di Poincaré su $X \times \widehat{X}$ che sia normalizzato, ovvero, tale che $\mathcal{P}|_{X \times \{0\}}$ e $\mathcal{P}|_{\{0\} \times \widehat{X}}$ siano entrambi i fasci banali $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$ rispettivamente; $\mathcal{P}_\alpha$ indica il fibrato lineare $\mathcal{P}|_{X \times \{\alpha\}} \in \text{Pic}^0(X)$ corrispondente al punto $\alpha \in \widehat{X}$ e $\mathcal{P}_x$ indica il fibrato lineare $\mathcal{P}|_{\{x\} \times \widehat{X}}$ corrispondente al punto $x \in X$; in particolare, la scelta del fibrato di Poincaré induce un isomorfismo tra X e $\widehat{\widehat{X}}$ ottenuto assegnando al punto $x \in X$ il fibrato lineare $\mathcal{P}_x$.

Si denota con $\mathbf{D}_c^b(X)$ la categoria derivata dei fasci coerenti su X ; più esattamente, $\mathbf{D}_c^b(X)$ è la categoria triangolata dei complessi di fasci quasi-coerenti su X , a meno di omotopia e quasi-isomorfismo, che abbiano coomologia coerente e limitata; per una definizione rigorosa di questa categoria si rimanda a [H2], mentre per una introduzione più ragionata si rimanda a [I]. Con $[-]$ si denota il funtore di traslazione nella categoria $\mathbf{D}_c^b(X)$, indotto dal funtore di shift a destra della categoria dei complessi.

$\mathbf{D}_c^b(X)$ è un oggetto di natura omotopica strettamente legato alla geometria della varietà X in questione e rappresenta il necessario completamento della categoria abeliana dei fasci coerenti su X al fine di una corretta definizione dei funtori di integrazione sulle fibre $\pi_{*,1}$ e di composizione e dualità $\pi^{*,1}$ associati ad un morfismo $\pi: X \longrightarrow Y$ di schemi.

DEFINIZIONE. 4.2. La *trasformazione di Fourier-Mukai* è il funtore

$$\mathbf{R}\mathcal{S}(-): \mathbf{D}_c^b(X) \longrightarrow \mathbf{D}_c^b(\widehat{X})$$

definito ponendo, per ogni elemento $A \in \mathbf{D}_c^b(X)$,

$$\mathbf{R}\mathcal{S}(A) := \mathbf{R}\pi_{\widehat{X}*}(\pi_X^*(A) \otimes \mathcal{P});$$

in modo simile viene definita la trasformazione inversa $\mathbf{R}\widehat{\mathcal{S}}(-) : \mathbf{D}_c^b(\widehat{X}) \longrightarrow \mathbf{D}_c^b(X)$.

Ogni fascio coerente F su X può essere visto come un complesso di fasci concentrato nel grado 0 e quindi come un elemento di $\mathbf{D}_c^b(X)$, ma, la sua trasformazione di Fourier $\mathbf{R}\mathcal{S}(F) \in \mathbf{D}_c^b(\widehat{X})$ non è necessariamente un elemento della categoria derivata di $\widehat{X}$ che può essere rappresentato da un fascio coerente su $\widehat{X}$; quando questo accade, ovvero, nel caso in cui si abbia $\mathbf{R}^k\mathcal{S}(F) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ tranne che per un $\bar{k} \in \mathbb{Z}$ per il quale si ha $\mathbf{R}^{\bar{k}}\mathcal{S}(F) \neq 0$ si dice che F soddisfa il teorema dell'indice in maniera debole con indice $i(F) := \bar{k}$; in questo caso il fascio coerente $\widehat{F} := \mathbf{R}^{\bar{k}}\mathcal{S}(F)$ su $\widehat{X}$ è detto la trasformata di Fourier di F .

Se succede che $H^k(X, F \otimes \mathcal{P}_\alpha) = 0$ per ogni $\alpha \in \widehat{X}$ e ogni $k \in \mathbb{Z}$ tranne che per un $\bar{k} \in \mathbb{Z}$ per il quale si ha che $H^{\bar{k}}(X, F \otimes \mathcal{P}_\alpha) \neq 0$ per qualche $\alpha \in \widehat{X}$, allora si dice che il fascio coerente F su X soddisfa il teorema dell'indice con indice $i(F) := \bar{k}$; naturalmente, in questo caso si ha che $\mathbf{R}^k\mathcal{S}(F) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ tranne che per $\bar{k}$ e, inoltre, $\widehat{F}$ è un fascio localmente libero.

OSSERVAZIONE. Per avere un'idea dell'oggetto $\mathbf{R}\mathcal{S}(F) \in \mathbf{D}_c^b(\widehat{X})$ associato ad ogni fascio coerente F su X , si può pensare, con evidente analogia con la trasformazione di Fourier classica, di avere 'espanso' il fascio F nella collezione dei fibrati lineari $\{\mathcal{P}_\alpha\}$, $\alpha \in \widehat{X}$, in modo da avere la coomologia $H(X, F \otimes \mathcal{P}_\alpha)$ a coefficiente di ogni $\mathcal{P}_\alpha$.

Parte dell'importanza di questa trasformazione è dovuta al risultato seguente (cfr. [M2]).

TEOREMA. 4.3. *La trasformazione di Fourier-Mukai stabilisce una equivalenza tra le categorie $\mathbf{D}_c^b(X)$ e $\mathbf{D}_c^b(\widehat{X})$ e ammette $(-1_{\widehat{X}})^* \circ [\dim X] \circ \mathbf{R}\widehat{\mathcal{S}}(-)$ come funtore quasi-inverso; in altre parole, c'è un isomorfismo di funtori*

$$\begin{cases} \mathbf{R}\widehat{\mathcal{S}}(-) \circ \mathbf{R}\mathcal{S}(-) = (-1_X)^* [\dim X] \\ \mathbf{R}\mathcal{S}(-) \circ \mathbf{R}\widehat{\mathcal{S}}(-) = (-1_{\widehat{X}})^* [\dim X] \end{cases}$$

OSSERVAZIONE. La proposizione precedente può essere riformulata come segue: per ogni fascio F resta definita una successione spettrale $E_2^{p,q} := \mathbf{R}^q\widehat{\mathcal{S}}(\mathbf{R}^p\mathcal{S}(-))$ che converge $(-1_{\widehat{X}})^* F$ se $p+q = 2$ e a 0 se $p+q \neq 2$.

Nel corollario seguente sono sintetizzate alcune delle proprietà numeriche più utilizzate della trasformazione di Fourier-Mukai.

COROLLARIO. 4.4. *Sia F un fascio coerente su X che soddisfa il teorema dell'indice in maniera debole con trasformata di Fourier $\widehat{F}$; si ha che*

• anche $\widehat{F}$ soddisfa il teorema dell'indice in maniera debole con indice $i(\widehat{F}) = \dim X - i(F)$ e si ha

$$\chi_X(F) = (-1)^{i(F)} \operatorname{rk}(\widehat{F});$$

• se G è un fascio coerente che soddisfa il teorema dell'indice in maniera debole con indice $i(G)$, allora, per ogni $i \in \mathbb{Z}$, si ha che $\operatorname{Ext}^i(F, G) = \operatorname{Ext}^i(\widehat{F}, \widehat{G})$;

• per ogni $i \in \mathbb{Z}$, si ha che $\operatorname{Ext}^i(F, F) = \operatorname{Ext}^i(\widehat{F}, \widehat{F})$, in particolare, se F è un fascio semplice, anche $\widehat{F}$ lo è;

• per ogni $i \in \mathbb{Z}$ e per ogni $\alpha \in \widehat{X}$ e $x \in X$, si ha che

$$\begin{cases} H^i(X, F \otimes \mathcal{P}_\alpha) = \operatorname{Ext}^{\dim X - i(F) + 1}(\mathbb{C}_\alpha, \widehat{F}), \\ \operatorname{Ext}^i(\mathbb{C}_x, F) = H^{i - i(F)}(\widehat{X}, \widehat{F} \otimes \mathcal{P}_{-x}). \end{cases}$$

Qui di seguito viene descritta la classe dei fasci semi-omogenei, una classe di fasci che è conservata dalla trasformazione di Fourier-Mukai e sulla quale è possibile descrivere in modo dettagliato l'azione di quest'ultima.

DEFINIZIONE. 4.5. Un fascio localmente libero F su una varietà abeliana X si dice *semi-omogeneo* se per ogni $x \in X$, denotato con T_x il funtore di traslazione corrispondente, esiste un fibrato lineare $L \in \operatorname{Pic}(X)$ tale che $T_x^*(F)$ sia isomorfo a $F \otimes L$; se, inoltre, per ogni $x \in X$, si può prendere $L := \mathcal{O}_X$, ovvero, se si ha che $T_x^*(F)$ è isomorfo a F , allora il fibrato F si dice *omogeneo*.

OSSERVAZIONE. Un fibrato lineare $L \in \operatorname{Pic}(X)$ è certamente semi-omogeneo ed è omogeneo se e soltanto se $L \in \operatorname{Pic}^0(X)$. Su una curva ellittica ogni fibrato vettoriale non decomponibile è semi-omogeneo, mentre in dimensione più alta i fibrati vettoriali semi-omogenei sono molto speciali.

PROPOSIZIONE. 4.6. Un fascio semi-omogeneo F è omogeneo se e soltanto se il suo determinante è omogeneo, ovvero, se e soltanto se $\det(F) \in \operatorname{Pic}^0(X)$.

DEFINIZIONE. 4.7. Un fascio F su una varietà abeliana X si dice *unipotente* se ammette una filtrazione in cui ogni quoziente successivo sia isomorfo al fascio banale $\mathcal{O}_X$.

La proposizione seguente è una semplice conseguenza della semi-esattezza del funtore trasformazione di Fourier-Mukai precedentemente definito.

PROPOSIZIONE. 4.8. *Un fascio unipotente su X soddisfa il teorema dell'indice in maniera debole con indice uguale a $\dim X$, inoltre, il funtore trasformazione di Fourier-Mukai stabilisce una equivalenza tra la categoria dei fasci unipotenti su X e la categoria dei fasci coerenti su $\widehat{X}$ supportati nell'origine $\widehat{0} \in \widehat{X}$.*

Per fornire altri esempi di fasci semi-omogenei è necessario osservare quanto espresso nella seguente proposizione.

PROPOSIZIONE. *Per ogni $\alpha \in \widehat{X}$ e ogni $x \in X$, si ha che*

$$\begin{cases} \mathbf{R}\widehat{\mathcal{S}}(-) \circ T_\alpha^* = (- \otimes \mathcal{P}_{-\alpha}) \circ \mathbf{R}\widehat{\mathcal{S}}(-) \\ \mathbf{R}\widehat{\mathcal{S}}(-) \circ (- \otimes \mathcal{P}_x) = T_x^* \circ \mathbf{R}\widehat{\mathcal{S}}(-) \end{cases}$$

Con questa proposizione si può mostrare facilmente il seguente risultato.

TEOREMA. 4.9. *Il funtore trasformazione di Fourier-Mukai stabilisce una equivalenza tra la categoria dei fasci omogenei su X e la categoria dei fasci coerenti su $\widehat{X}$ supportati su di un numero finito di punti.*

Siamo ora in grado di enunciare il risultato che è strumento essenziale nella dimostrazione della proposizione 3.13.

PROPOSIZIONE. 4.10. *Ogni fascio omogeneo su una superficie abeliana soddisfa al teorema dell'indice in maniera debole con indice 2 e la sua trasformazione di Fourier-Mukai è un fascio coerente supportato su di un numero finito di punti della superficie abeliana duale; il fascio omogeneo in questione è unipotente se e soltanto se la sua trasformazione di Fourier-Mukai è un fascio coerente supportato nell'origine.*

Come corollario dei precedenti risultati si ottiene il seguente risultato di classificazione.

TEOREMA. 4.11. *Un fascio localmente libero F su una varietà abeliana X è semi-omogeneo se e soltanto se è della forma $\bigoplus_{i \in I} (\alpha_i \otimes U_i)$ dove, per ogni $i \in I$, $\alpha_i \in \text{Pic}^0(X)$ e U_i è un fascio unipotente.*

Di seguito sono enunciate alcune proprietà particolari di cui gode un fascio omogeneo, per la cui dimostrazione si rimanda a [M1].

PROPOSIZIONE. 4.12. Per un fascio omogeneo F su una varietà abeliana X le seguenti condizioni sono equivalenti: che F contenga un fibrato unipotente come addendo diretto, che sia $h^0(X, F) > 0$, che sia $h^0(X, F^\vee) > 0$, che sia $h^1(X, F) > 0$.

COROLLARIO. 4.13. Se F è un fascio omogeneo su una superficie abeliana X , allora si ha che $h^0(X, F) > 0$ se e soltanto se $h^2(X, F) > 0$.

PROPOSIZIONE. 4.14. Sia F un fascio localmente libero su una superficie abeliana X ; se F è μ_H -semistabile, per qualche polarizzazione $c_1(H) \in \text{NS}(X)$, allora deve essere $\lambda(F) \geq 0$ con $\lambda(F) = 0$ se e soltanto se F è un fascio semi-omogeneo su X .

PROPOSIZIONE. 4.15. Se F è un fibrato vettoriale omogeneo su una varietà abeliana X e F' è un suo quoziente non nullo e privo di torsione, allora $c_1(F') \geq 0$ con $c_1(F') = 0$ se e soltanto se F' è anch'esso un fibrato vettoriale omogeneo.

PROPOSIZIONE. 4.16. Se F è un fascio privo di torsione su una superficie abeliana X , allora anche il fascio $\mathbf{R}^0 S(F)$ è un fascio privo di torsione su $\text{Pic}^0(X)$; questo fatto non è necessariamente vero per gli $\mathbf{R}^i S(F)$, con $i = 1, 2$.

In ultimo, è enunciata una proprietà di anticommutatività per la trasformazione di Fourier-Mukai che è utilizzata nella proposizione 3.4.

PROPOSIZIONE. 4.17. Si ha la seguente regola di anticommutatività:

$$\mathbf{R}Hom(-, \mathcal{O}_X) \circ \mathbf{R}S = \left((-1_X)^* \circ \mathbf{R}S \circ \mathbf{R}Hom(-, \mathcal{O}_X) \right) [2]$$

Bibliografia

- [AC] E. Arbarello, M. Cornalba, *Su una congettura di Petri*, Comm. Math. Helv., 56, (1981), pp. 1 - 38.
- [ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 267, Springer, 1985.
- [B] A. Beauville, *Quelques remarques sur la transformation de Fourier dans l'anneau de Chow d'une variété abélienne*, Lecture Notes in Mathematics, 1016, (1983), pp. 238 - 260.
- [D] A. Dold, *Lectures on algebraic topology*, Springer, 1980.
- [EH] D. Eisenbud, J. Harris, *A simpler proof of the Gieseker-Petri theorem on special divisors*, Invent. Math., 74, (1983), pp. 269 - 280.
- [FL] R. Fahlouai, Y. Laszlo, *Transformée de Fourier et stabilité sur les surfaces abéliennes*, Compositio Math., 79, (1991), pp. 271 - 278.
- [F] R. Friedman, *Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles*, Univeritext, Springer, 1998.
- [Fu] W. Fulton, *Intersection theory*, Springer, 1998.
- [G] D. Gieseker, *Stable curves and special divisors: Petri's conjecture*, Invent. Math., 66, (1982), pp. 251 - 275.
- [GH] P.A. Griffiths, J. Harris, *The dimension of the variety of special linear systems on a general curve*, Duke Math J., 47, 1980, pp. 233 - 272.
- [GM] M. Goresky, R. MacPherson, *Stratified Morse theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3 Folge, Band 14, Springer, 1988.
- [Gro] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique*, Publ. Math. IHES, 4,8,11,17,20,24,28,32.
- [H1] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate texts in mathematics, 52, Springer, 1977.
- [H2] R. Hartshorne, *Residues and duality*, Lect. Notes in Math., 20, 1966.
- [HuLa] K. Hulek, H. Lange, *Examples of abelian surfaces in $\mathbb{P}_4$* , J. reine angew. Math., 363, (1985), pp. 200 - 216.
- [HL] D. Huybrechts, M. Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects of mathematics. 31, Vieweg, 1997.

-
- [I] L. Illusie, *Catégories dérivées et dualité, travaux de J. L. Verdier*, Enseign.-Math., 36, (1990), pp. 369 - 391.
- [K] S. A. Kuleshov, *Stable bundles on K3 surfaces*, Math. USSR Izvestiya, 36, (1991).
- [La] H. Lange, *Projective embeddings of abelian varieties*, Jber. d. Dt. Math.-Verein., 93, (1991), pp. 161 - 174.
- [LB] H. Lange, Ch. Birkenhake, *Complex abelian varieties*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 302, Springer, 1992.
- [L1] R. Lazarsfeld, *A sampling of vector bundles techniques in the study of linear systems*, Lectures on Riemann surfaces, Trieste, M. Cornalba et al. eds, World Scientific, 1987.
- [L2] R. Lazarsfeld, *Brill-Noether-Petri without degenerations*, J. Differential Geom., 23 (1986), pp. 299-307.
- [M1] S. Mukai, *Semi-homogeneous vector bundles on an abelian variety*, J. Math. Kyoto Univ., 18 (1978), 2, pp. 239-272.
- [M2] S. Mukai, *Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J., 81, (1981), pp.153-175.
- [M3] S. Mukai, *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface*, Invent. Math., 77, (1984), pp. 101 - 116.
- [M4] S. Mukai, *Fourier functor and its application to the moduli of bundles on an abelian variety*, Advanced studies in pure mathematics, 10 (1987), pp. 515-550.
- [M5] S. Mukai, *Vector bundles and Brill-Noether theory*, Complex Algebraic Geometry, MSRI Publications, 28, (1995), pp. 145 - 157.
- [M6] S. Mukai, *Duality of polarized K3 surfaces*, New trends in algebraic geometry, Hulek et al. eds, Cambridge University Press, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., 264, (1999), pp. 311 - 326.
- [M7] S. Mukai, *Abelian variety and spin representation*, English translation of the Japanese version in *Hodge theory and algebraic geometry*, Sapporo, 1994, pp. 110 - 135.
- [Mu] D. Mumford, *Abelian varieties*, Oxford University Press, 1970.
- [O] T. Oda, *Vector bundles on abelian surfaces*, Invent. Math., 13, (1971), pp. 247 - 260.
- [Pa] G. Pareschi, *A proof of Lazarsfeld's theorem on curves on K3 surfaces*, J. Alg. Geom., 4 (1995), pp. 201-222.
- [Pe] K. Petri, *Über Spezialkurven I.*, Math. Ann., 93, (1924), pp. 182 - 209.
- [Ra] S. Ramanan, *Ample divisors on abelian surfaces*, Proc. London Math. Soc. (3),
-

51, (1985), pp. 231 - 245.

[R] I. Reider, *Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces*, Ann. Math., 127, (1988), pp. 309 - 316.

[S] R.L.E. Schwarzenberger, *Jacobians and symmetric products*, Ill. J. Math., 7, (1963), pp. 257 - 268.

[T] A. Treibich, *Revetements tangentiels et condition de Brill-Noether*, C. R. Acad. Sci., Paris, Série I, 316, (1993), pp. 373 - 375.

[U] H. Umemura, *Moduli spaces of the stable vector bundles over abelian surfaces*, Nagoya Math. J., 77, (1980), pp. 47 - 60.

[Y] K. Yoshioka, *Some examples of Mukai's reflections on K3 surfaces*, J. reine angew. Math., 515, (1999), pp. 97 - 123.