

1. Calcolare $\text{mcd}(623, 413)$, $\text{mcd}(1014, 273)$, $\text{mcd}(1122, 105)$ e $\text{mcd}(2244, 418)$.
2. Per i seguenti numeri n e m , determinare $a, b \in \mathbf{Z}$ tali che $an + bm = \text{mcd}(n, m)$.
 - (a) $n = 4$ e $m = 30$; (c) $n = 103$ e $m = 101$; (e) $n = 221$ e $m = 169$;
 - (b) $n = 14$ e $m = 40$; (d) $n = 91$ e $m = 0$; (g) $n = 10001$ e $m = 9999$.
3. (a) Determinare tutti gli $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = 20$;
 (b) Determinare tutti gli $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = -12$;
 (c) Determinare tutti gli $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $-24s + 18t = -12$;
 (d) Determinare tutti gli $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = 3$.
4. Determinare, se possibile, almeno tre diverse soluzioni intere delle seguenti equazioni:
 - (a) $8316x + 10920y = 100$;
 - (b) $8316x + 10920y = -168$;
 - (c) $8316x + 10920y = 84$;
5. Siano a e b interi con $\text{mcd}(a, b) = d$. Dimostrare che $\text{mcd}(a/d, b/d) = 1$.
6. Siano n, m due numeri naturali. Siano $\text{mcd}(n, m)$ e $\text{mcm}(n, m)$ il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo fra n ed m . Dimostrare che $\text{mcm}(n, m) \cdot \text{mcd}(n, m) = nm$.
7. Determinare tutte le soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$ delle seguenti congruenze
 - (a) $x \equiv 3 \pmod{11}$; (b) $3x \equiv 1 \pmod{5}$; (c) $9x \equiv 0 \pmod{30}$.
8. Stabilire se per le seguenti congruenze esistono soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$. In caso affermativo, determinarle tutte. (a) $5x \equiv 8 \pmod{17}$ (b) $9x \equiv 26 \pmod{30}$; (c) $9x \equiv 24 \pmod{30}$.
9. Per le congruenze dei due esercizi precedenti, determinare tutte le soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$ tale che $0 < x < 40$.
10. Determinare tutte le soluzioni $x \in \mathbf{Z}$ dei seguenti sistemi di congruenze
 - (a) $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{8}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5x \equiv 4 \pmod{8}, \\ 3x \equiv 3 \pmod{5}, \\ 2x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 9x \equiv 20 \pmod{8}, \\ x \equiv -2 \pmod{5}, \\ -8x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$
11. Per i sistemi di congruenze dell'esercizio precedente, determinare tutte le soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$ tale che $0 \leq x < 1000$.
10. Nell'antica Cina, ogni reggimento era formato da 1000 soldati. Per assicurarsi che ogni reggimento fosse al completo, si chiedeva agli uomini di mettersi in fila per 7, poi per 11 e, in fine per 13. Se, nei tre casi, mancava un soldato all'ultima fila, si era certi che il reggimento fosse al completo. Perché?
12. Stabilire se i seguenti sistemi di congruenze hanno soluzioni e, in caso affermativo, determinarle tutte.
 - (a) $\begin{cases} 9x \equiv 6 \pmod{15}, \\ 2x \equiv 7 \pmod{9}, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -9x \equiv 6 \pmod{15}, \\ -2x \equiv 7 \pmod{9}, \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 9x \equiv 6 \pmod{15}, \\ 4x \equiv 5 \pmod{9}, \\ 4x \equiv 8 \pmod{10}, \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 9x \equiv 6 \pmod{15}, \\ 4x \equiv 5 \pmod{9}, \\ 4x \equiv 6 \pmod{10}, \end{cases}$
13. Stabilire se i seguenti sistemi di congruenze hanno soluzioni e, in caso affermativo, determinarle tutte.
 - (a) $\begin{cases} x \equiv 23 \pmod{15}, \\ x \equiv 2 \pmod{7}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x \equiv 23 \pmod{15}, \\ 3x \equiv 13 \pmod{7}, \\ 2x \equiv -21 \pmod{5}, \end{cases}$
11. Determinare il resto delle divisioni per 3, 9, 4, 11 del numero 3548917.
14. Far vedere che $1234567 \times 90123 \equiv 1 \pmod{10}$ e $2468 \times 13579 \equiv -3 \pmod{25}$.
13. Sia $x = x_n x_{n-1} \dots x_0$ un numero intero positivo rappresentato in base 10. Far vedere che $x \equiv x_0 - x_1 + x_2 - \dots + (-1)^n x_n \pmod{11}$. Decidere se 1213141516171819 è divisibile per 11.
15. Sia $x = x_n x_{n-1} \dots x_0$ un numero intero positivo rappresentato in base 10. Far vedere che $x \equiv x_n + x_{n-1} + \dots + x_0 \pmod{9}$. Usare questo risultato per dimostrare che la moltiplicazione $54321 \times 98765 = 5363013565$ è sbagliata.
16. Per $n, b \in \mathbf{N}$, indichiamo con $(n)_b$ la scrittura di n in base b .
 - (a) Determinare il resto della divisione per 3 del numero $(1100110)_2$.
 - (b) Determinare il resto della divisione per 4 del numero $(210211)_3$.