

1. Per le seguenti relazioni R di $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ stabilire quali sono simmetriche, riflessive o transitive.
 - (a) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n = m\}$;
 - (b) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : |n - m| = 5\}$;
 - (c) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n \geq m\}$;
 - (d) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n^2 \equiv m^2 \pmod{7}\}$.
2. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
 - (a) Esibire una relazione su di X , che sia riflessiva, simmetrica, ma non transitiva.
 - (b) Esibire una relazione su di X , che sia simmetrica, transitiva ma non riflessiva.
 - (c) Esibire una relazione su di X , che sia riflessiva, transitiva, ma non simmetrica.
3. Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
 - (i) Consideriamo su X la relazione: xRy se $x + y$ è un numero pari. Dimostrare che R è una relazione di equivalenza e determinare le classi di equivalenza corrispondenti.
 - (ii) Consideriamo su X la relazione: $xR'y$ se $x + y$ è un numero dispari. Determinare se R' è una relazione di equivalenza.
4. Sia $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e sia $R = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A : a + d = b + c\}$.
 - (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
 - (b) Sia $\tilde{A}$ = l'insieme delle classi di equivalenza di R . Dimostrare che la mappa $f : \tilde{A} \rightarrow \mathbf{Z}$ che associa la differenza $a - b$ alla classe di (a, b) , è ben definita ed è una biezione.
5. Sia A un insieme di n elementi. Per $i = 0, 1, \dots, n$, sia $P_i \subset \mathcal{P}(A)$ la collezione dei sottoinsiemi di A che possiedono esattamente i elementi.
 - (a) Dimostrare che gli insiemi P_i formano una partizione di $\mathcal{P}(A)$.
 - (b) Esibire una relazione di equivalenza su $\mathcal{P}(A)$ che induce la partizione della parte (a).
6. Quante relazioni di equivalenza distinte si possono definire sull'insieme $\{a, b, c, d\}$?
7. Con $\mathcal{P}(A)$ indichiamo l'insieme delle parti di un insieme A . Sia $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$. Definiamo un ordinamento parziale su X ponendo $A \leq B$ quando $A \subset B$ per $A, B \in X$. Disegnare il diagramma di Hasse.
8. L'insieme $\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}$ è ordinato mediante $d \leq d'$ quando d divide d' . Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.
 - (a) Determinare gli elementi massimali e minimali.
 - (b) Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.
 - (c) Trovare i maggioranti di $\{2, 9\}$ e, se esiste, $\sup(\{2, 9\})$.
 - (d) Trovare i minoranti di $\{60, 72\}$ e, se esiste, $\inf(\{60, 72\})$.
9. Sia $X \subset \mathcal{P}\{1, 2, 3, 4\}$ dato da $X = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$. Definiamo un ordinamento parziale su X ponendo $A \leq B$ quando $A \subset B$ per $A, B \in X$. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.
 - (a) Determinare gli elementi massimali e minimali.
 - (b) Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.
 - (c) Trovare i maggioranti di $\{\{2\}, \{4\}\}$ e, se esiste, $\sup(\{2\}, \{4\})$.
 - (d) Trovare i minoranti di $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ e, se esiste, $\inf(\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\})$.
10. Si consideri su $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ l'ordinamento lessicografico:

$$(m, n) \leq (p, q) \text{ se } m < p, \text{ oppure se } m = p \text{ e } n \leq q.$$
 - (a) Dimostrare che è un ordinamento parziale.
 - (b) Sia $A = \{(1, 2), (4, 5), (7, 7), (8, 9), (3, 4), (3, 6), (7, 2)\} \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, con l'ordinamento indotto. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento su A . Determinare gli elementi massimali e minimali. Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.
11. Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$ con la relazione

$$R = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, e), (c, a), (c, d), (e, a)(e, b), (e, c), (e, d)\}.$$
 Disegnare il grafo diretto associato. Scrivere la matrice associata.
12. Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$. Determinare la chiusura transitiva delle seguenti relazioni:
 - (a) $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$.
 - (b) $\{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$.
 - (c) $\{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$.
 - (d) $\{(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$.