

- Siano $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Determinare:
 - $A \cap B \cap C$;
 - $(A \cup B) \cap C$;
 - $A \cup (B \cap C)$;
 - $(A - B) - C$;
 - $A - (B - C)$;
 - $A \cap (B - C)$.
- Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $A_n = \{m \in \mathbf{N} : m \leq n\}$. Determinare $A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7$ e determinare $A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$.
 - Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $B_n = \{m \in \mathbf{Z} : \text{esiste un } k \in \mathbf{Z} \text{ tale che } m = kn\}$. Determinare $B_4 \cap B_5 \cap B_6$.
- Costruire tre insiemi A, B, C per cui $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$.
- Siano A, B sottoinsiemi di un insieme X . È vero che $A^c \cup B^c = (A \cup B)^c$? Dimostrarlo, o determinare insiemi A, B, X per cui non vale.
- Siano A, B e C tre sottoinsiemi di X . Dimostrare
 - $A \cup B \subset A \cup B \cup C$;
 - $(A - B) - C \subset A - C$;
 - $(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$;
 - $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$.
- Determinare $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
 - Determinare $\mathcal{P}(\{0\})$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\}))$.
- Determinare le seguenti intersezioni infinite $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}}]-\infty, n]$, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [n, \infty[$.
- Determinare le seguenti unioni infinite $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $\bigcup_{n \in \mathbf{N}}]-\infty, n]$, $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [n, \infty[$.
- Siano $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. e $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
 - Determinare due funzioni iniettive distinte $f, g: A \rightarrow B$. Quante ce ne sono in tutto?
 - Determinare due funzioni suriettive distinte $f, g: B \rightarrow A$. Ne esistono di iniettive?
 - Determinare due funzioni biettive distinte $f, g: B \rightarrow C$. Quante ce ne sono in tutto?
- Sia $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, definita da $f(n) = 3n^2$. Determinare se f è iniettiva, suriettiva, biettiva.
- Sia $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$, definita da $f(n) = 3n^2 + 4$. Determinare se f è iniettiva, suriettiva, biettiva.
- Costruire una funzione $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ tale che
 - f è una iniezione ma non una suriezione.
 - f è una suriezione ma non una iniezione.
- Se esiste, costruire una biiezione fra i seguenti insiemi.
 - $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{7, 8, 10\}$;
 - $A = \{0, 1\}$ e $B = \{1\}$;
 - $\mathbf{Z}$ e $\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ è dispari}\}$;
 - $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R} - \{0\}$;
 - $\mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$;
 - $A = \{a, b\}$ e $\mathcal{P}(A)$.
- Costruire due insiemi finiti A, B per cui $\text{card}(A \cup B) \neq \text{card}(A) + \text{card}(B)$ e due insiemi finiti C, D per cui $\text{card}(C \cup D) = \text{card}(C) + \text{card}(D)$.
- Dimostrare i seguenti fatti:
 - Sia $A \subset B$ un sottoinsieme di un insieme numerabile. Allora A è finito oppure è numerabile.
 - Siano A, B due insiemi numerabili. Allora gli insiemi $A \cup B$ e $A \times B$ sono numerabili.
 - Per $k = 1, 2, 3, \dots$, siano A_k insiemi numerabili. Allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ è numerabile.
- Dimostrare per induzione che $n^3 - n$ è multiplo di 3, per ogni $n \in \mathbf{N}$.
- Dimostrare per induzione che $3^n < n!$ per ogni $n \geq 7$.
 - Trovare $n_0 \in \mathbf{N}$ tale che $4^{n_0} < n_0!$. Dimostrare per induzione che $4^n < n!$ per ogni $n \geq n_0$.
- Dimostrare per induzione che $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ per ogni intero $n \geq 1$.
- Dimostrare per induzione che la somma dei cubi dei primi n numeri pari è uguale a $2n^2(n+1)^2$.
- Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, risulta $\sum_{i=0}^n (4i+1) = (2n+1)(n+1)$.
- Sia $F: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione ricorsiva definita da $F(0) = 1$, $F(n) = F(n-1) + 2$, per $n \geq 1$. Calcolare $F(1), F(2), F(3), F(4)$. Chi sono i numeri $F(n)$?
- Sia $F: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione ricorsiva definita da $F(1) = 1$, $F(n) = n + F(n-1)$, per $n \geq 1$. Calcolare $F(1), F(2), F(3), F(4)$. Dimostrare per induzione che $F(n) = n(n+1)/2$.
- Siano $F_0 = 0, F_1 = 1$, ed $F_k = F_{k-2} + F_{k-1}$, per $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, i numeri di Fibonacci.
 - Dimostrare che $F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$.
 - Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, risulta che $\text{mcd}(F_n, F_{n+1}) = 1$.
 - Dimostrare che $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$ per ogni $n \geq 1$.