COGNOME .... **NOME** .... Data di nascita.................. Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Tutte le risposte devono essere motivate da spiegazioni *chiare ed essenziali.* Non verranno valutate affermazioni non motivate. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Sia $A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x = \frac{a}{5^k}$ con $a = 1, 2, 3$ e $k \in \mathbf{N}\}$. In altre parole, A è l'insieme di tutti i numeri razionali della forma $\frac{a}{5^k}$, con $a = 1, 2, 3$ e $k \in \mathbf{N}$. Esibire, se possibile, una funzione biettiva $f : \mathbf{N} \to A$ e, determinarne la funzione inversa.

Soluzione. La descrizione di X suggerisce la seguente partizione: $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, dove X_1 (risp. X_2, X_3) è l'insieme dei numeri razionali del tipo $\frac{1}{5^k}$ (risp. $\frac{2}{5^k}$, $\frac{3}{5^k}$). Un modo semplice di trovare una funzione biettiva tra $\mathbf{N} \to X$ consiste nel fare corrispondere biettivamente X_1 con l'insieme $\{n \in \mathbf{N} \mid n \equiv 1 \pmod 3)$, X_2 con l'insieme $\{n \in \mathbf{N} \mid n \equiv 2 \pmod 3)$, X_3 con l'insieme $\{n \in \mathbf{N} \mid n \equiv 0 \pmod 3)$. Concretamente, dato $n \in \mathbf{N}$, si può definire

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{5^{\frac{n+2}{3}}} & \text{se } n \equiv 1 \pmod 3 \\ \frac{2}{5^{\frac{n+1}{3}}} & \text{se } n \equiv 2 \pmod 3 \\ \frac{3}{5^{\frac{n}{3}}} & \text{se } n \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

Quindi: $f(1) = \frac{1}{5}$, $f(2) = \frac{2}{5}$, $f(3) = \frac{3}{5}$, $f(4) = \frac{1}{5^2}$, $f(5) = \frac{2}{5^2}$, $f(6) = \frac{3}{5^2}$, ...

La funzione inversa di f è:
- dato $\frac{1}{5^k} \in X_1$, $f^{-1}(\frac{1}{5^k}) = 3k - 2$,
- dato $\frac{2}{5^k} \in X_2$, $f^{-1}(\frac{1}{5^k}) = 3k - 1$,
- dato $\frac{3}{5^k} \in X_3$, $f^{-1}(\frac{3}{5^k}) = 3k$.

2. Sia $X = \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ e si considerino le seguenti relazioni R,S,T:
- dati A e B in X, $A\,R\,B$ se e solo se $|A \cap B|$ é un numero pari (in questo esercizio lo 0 viene considerato un numero pari);
- dati A e B in X, $A\,S\,B$ se e solo se $A \cap B^c = \emptyset$;
- dati A e B in X, $A\,T\,B$ se e solo se $|A| = |B|$ o $|A| = |B^c|$.

Per ognuna delle relazioni precedenti, stabilire se sono relazioni d'ordine oppure no, e se sono relazioni di equivalenza oppure no. In caso di relazione di equivalenza, descrivere tutte le classi di equivalenza.

Soluzione. - R non è ne' d'ordine ne' di equivalenza, perchè non è transitiva. Ad esempio: $\{a, b\}\,R\,\{a, b, c, d\}$ perchè $|\{a, b\} \cap \{a, b, c, d\|| = |\{a, b\}| = 2$. Allo stesso modo, $\{a, b, c, d\}\,R\,\{a, c\}$. Però $|\{a, b\} \cap \{a, c\}| = |\{a\}| = 1$. Quindi $\{a, b\}$ non è in relazione, secondo R, con $\{a, c\}$.
- S è una relazione d'ordine e non di equivalenza. Infatti, sappiamo che $A \cap B^c = \emptyset$ significa $A \subseteq B$.
- T non è una relazione d'ordine (non è antisimmetrica). T è una relazione di equivalenza (vedi Es. 3, primo appello 2003-'04, 28.04.'04) e ci sono tre classi di equivalenza :

$$\big\{\emptyset, \{a, b, c, d\}\big\}, \qquad \big\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\big\}$$

$$\big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \big\}.$$

3. Determinare, se esistiono, tutte le soluzioni intere, comprese tra -700 e 700, delle seguenti congruenze:

$$(a)\ \ 414x \equiv 2 \pmod{662}; \qquad (b)\ \ 414x \equiv -11 \pmod{662}; \qquad (c)\ \ 414x \equiv -8 \pmod{662}$$

Soluzione. Con l'algoritmo euclideo si vede che: (i) $mcd(662, 414) = 2$ e inoltre che: (ii) $2 = 662 \cdot (-5) + 414 \cdot 8$.

Da (ii) si deduce che sia (a) che (c) hanno soluzioni intere, uniche $\pmod{331}$, mentre (b) non ha soluzioni.
(a) Riducendo l'uguaglianza (ii) $\pmod{662}$ si vede che $x = 8$ è una soluzione. Quindi tutte le soluzioni intere sono: $8 + 331k$, $k \in \mathbf{Z}$. Quelle comprese tra -700 e 700 sono: -654, -323, 8, 339, 670.
(c) Poichè, come risulta da (a), $414 \cdot 8 \equiv 2 \pmod{662}$ si ha, moltiplicando per -4, che $414 \cdot (-32) \equiv -8 \pmod{662}$. Dunque le soluzioni intere sono $-32+331k$, $k \in \mathbf{Z}$. Quelle tra -700 e 700 sono: -694, -363, -32, 299, 630.

4. Si consideri l'insieme $X = \big\{(A,B) \in \mathcal{P}(\{1,2\}) \times \mathcal{P}(\{1,2\})$ tali che $A \subseteq B\big\}$, munito della relazione d'ordine "$\leq$" cosi̇̀ definita: dati (A,B) e (C,D) in X, $(A,B) \leq (C,D)$ se e solo se $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.
(a) Determinare tutti gli elementi di X, stabilire se $(X, \leq)$ è un reticolo e, in caso affermativo, deteminarne tutti gli atomi e tutti gli elementi irriducibili.
(b) Si considerino i reticoli $\mathbf{D}_{36}$ e $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$. Stabilire se $(X, \leq)$ è isomorfo a uno di questi reticoli e, in tal caso, stabilire quanti isomorfismi esistono ed esibirne esplicitamente uno.
(c) Esibire, se possibile, un elemento di X senza complemento.

Soluzioni. (a) X è l'insieme di tutte le coppie ordinate (A,B), dove A e B sono sottoinsiemi di $\{1,2\}$ tali che $A \subseteq B$. Dunque:

$$X = \big\{(\emptyset,\emptyset),\ (\emptyset,\{1\}),\ (\emptyset,\{2\}),\ (\emptyset,\{1,2\}),\ (\{1\},\{1\}),\ (\{1\},\{1,2\}),\ (\{2\},\{2\}),\ (\{2\},\{1,2\}),\ (\{1,2\},\{1,2\})\big\}.$$

Facendo il diagramma di Hasse di vede che $(X, \leq)$ è un reticolo (ogni coppia di elementi di X possiede inf e *sup*). Il minimo è $(\emptyset,\emptyset)$ e il massimo è $(\{1,2\},\{1,2\})$. Gli atomi sono: $(\emptyset,\{1\})$ e $(\emptyset,\{2\})$. Gli irriducibili sono: $(\emptyset,\{1\})$, $(\emptyset,\{2\})$, $(\{1\},\{1\})$ e $(\{2\},\{2\})$.
(b) - $(X, \leq)$ non è isomorfo a $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$, innanzitutto perchè $|\mathcal{P}(\{1,2,3\})| = 8$.
- $(X, \leq)$ è isomorfo a $\mathbf{D}_{36}$. Si vede che in questo caso in due atomi hanno un ruolo simmetrico. Quindi gli isomorfismi si ottengono mandando gli atomi di $(X, \leq)$ negli atomi di $\mathbf{D}_{36}$ e sono quindi due. Uno e':
$f((\emptyset,\emptyset)) = 1$, $f((\emptyset,\{1\}) = 2$, $f((\emptyset,\{2\}) = 3$, $f((\emptyset,\{1,2\}) = 6$, $f((\{1\},\{1\})) = 4$, $f((\{1\},\{1,2\}) = 12$, $f((\{2\},\{2\})) = 9$, $f((\{2\},\{1,2\})) = 18$, $f((\{1,2\},\{1,2\})) = 36$.
(c) Ad esempio, $(\emptyset,\{1,2\})$ non ha complemento (non c'è nessun altro elemento $x \in X$ tale che $A \wedge x = (\emptyset,\emptyset)$).

5. In un'algebra di Boole si consideri l'operazione $x \oplus y = x'y + xy'$. (a) Stabilire se le funzioni booleane $F(x,y,z) = (xz) \oplus (y \oplus x')$ e $E(x,y,z) = \big((xz) \oplus y\big) \oplus x'$ sono uguali o no.
(b) Scrivere $F(x,y,z)$ come somma di tutte le sue implicanti prime.

Soluzione. (a) La risposta e' si. (b) $F(x,y,z) = xyz' + x'y' + y'z$.
Per quanto riguarda il procedimento, si veda la soluzione dell'esercizio 5 del primo Appello di quest'anno accademico (22.02.'07). E' lo stesso esercizio.