Elementi di Algebra e Logica Primo Appello 22 febbraio 2007

COGNOME .... **NOME** .... Data di nascita.................. Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti.

Tutte le risposte DEVONO ESSERE MOTIVATE (con spiegazioni *chiare ed essenziali*). Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \exists n \text{ tale che } x = \frac{1}{n}\}$. Sia $B = \{k \in \mathbf{Z} \mid k \leq -6\}$. Sia $C = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 5\}$. Esibire una funzione biettiva $f : \mathbf{N} \to A \cup B \cup C$.

Soluzione. Si noti che B e C sono numerabili, in quanto sottoinsiemi infiniti di insiemi numerabili, mentre A è evidentemente numerabile, perchè in corrispondenza biunivoca con $\mathbf{N}$ $(n \leftrightarrow \frac{1}{n})$. Quindi $A \cup B \cup C$ è numerabile, in quanto unione finita di insiemi numerabili. Una funzione biettiva $f : \mathbf{N} \to A \cup B \cup C$ è, ad esempio,

$$f(m) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{m}{3}} & \text{se } n \equiv 0 \pmod 3 \\ -\frac{m+2}{3} - 5 & \text{se } m \equiv 1 \pmod 3 \\ -\frac{m+1}{3} + 4 & \text{se } m \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

2. Sia $X = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$. (a) Si consideri la relazione R su X cosı̀ definita: dati $(a, b) \in X$ e $(c, d) \in X$, $(a, b)\, R\, (c, d)$ se $a + d = b + c$. Stabilire se R è una relazione di equivalenza e, in caso affermativo, descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza.
(b) Si consideri la relazione S su X cosı̀ definita: dati $(a, b) \in X$ e $(c, d) \in X$, $(a, b)\, S\, (c, d)$ se $a \cdot d = b \cdot c$. Stabilire se S è una relazione di equivalenza e, in caso affermativo, descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza.

Soluzione.
(a) R è una relazione di equivalenza. Infatti:
- R è riflessiva, cioè $(a.b)\, R\, (a, b)$ per ogni $(a, b) \in X$. Infatti $a + b = b + a$
- R è riflessiva, cioè $(a.b)\, R\, (a, b)$ per ogni $(a, b) \in X$.
- R è simmetrica. Infatti, se $(a, b)\, R\, (c, d)$, cioè $a + d = b + c$, allora $c + b = d + a$, cioè $(c, d)\, R\, (a, b)$.
- R è transitiva. Infatti, se $(a, b)\, R\, (c, d)$ e $(c, d)\, R\, (e, f)$, cioè se $a + d = b + c$ se $c + f = d + e$, allora $a + d + c + f = b + c + d + e$, cioè $a + f = b + e$. Dunque $(a, b)\, R\, (e, f)$.

Per determinare le classi di equivalenza, è utile osservare che due coppie, (a, b) e (c, d), sono in relazione se e solo se $a - b = c - d$, cioè se e solo se la loro "differenza" è uguale. Dunque le classi di equivalenza corrisponderanno a tutte le possibili "differenze" di coppie di X, cioè: 0, 1, 2, -1, -2. Le classi sono:

$$\big\{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\big\}, \quad \big\{(1, 0), (2, 1)\big\}, \quad \big\{(2, 0)\big\}, \quad \big\{(0, 1), (1.2)\big\}, \quad \big\{(0, 2)\big\}$$

(b) La relazione S non è una relazione di equivalenza perchè non è transitiva. Infatti la coppia $(0, 0)$ è in relazione con tutte le altre coppie, ma le altre coppie non sono tutte in relazione tra loro. Esempio: $(1, 1)\, S\, (0, 0)$, perchè $1 \cdot 0 = 1 \cdot 0$. Inoltre $(0, 0)\, S\, (1, 2)$, perchè $0 \cdot 1 = 0 \cdot 2$. Ma $(1, 1)$ non è in relazione con $(1, 2)$, perchè $1 \cdot 2 \neq 1 \cdot 1$.

3. Determinare tutti i numeri interi $x \in \mathbf{Z}$ tali che $\begin{cases} x \equiv -12 \pmod 5 \\ 6x \equiv 4 \pmod 8 \\ 4x \equiv 3 \pmod 9 \end{cases}$.

Soluzione. L'equazione $4x \equiv 3 \pmod 9$ ha come soluzione $x \equiv 3 \pmod 9$.

L'equazione $6x \equiv 4 \pmod 8$ è equivalente a $3x \equiv 2 \pmod 4$ e ha come soluzione $x \equiv 2 \pmod 4$. Dunque il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x \equiv -2 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 4 \\ x \equiv 3 \pmod 9 \end{cases}$$

la cui soluzione è unica modulo 180. Con facili calcoli si perrviene alla soluzione generale $X = 138 + 180k$, per ogni $k \in \mathbf{R}$.

4. Calcolare il resto della divisione per 99 del numero 863945^{321545^2}.

Soluzione. Per il teorema cinese sei resti, è sufficiente trovare il numero x tale che $0 \leq x < 99$ tale che

$$\begin{cases} x \equiv 863945^{321545^2} \pmod 9 \\ x \equiv 863945^{321545^2} \pmod{11} \end{cases}$$

Osserviamo che

$$863945^{321545^2} \equiv (-1)^{321545^2} \equiv -1 \pmod 9$$

(la prima congruenza segue dal fatto un numero positivo è congruente, modulo 9, alla somma delle sue cifre decimali e la seconda dal fatto che 321545^2 è dispari). Inoltre

$$863945^{321545^2} \equiv 5^{321545^2} \equiv 5^{5^2} \equiv 5^5 \equiv 1 \pmod{11}$$

(la prima congruenza segue dal fatto che un numero positivo è congruente alla somma alternata delle sue cifre decimali, la seconda e la terza dal Teorema di Fermat perchè $321545^2 \equiv 5^2 \equiv 5 \pmod{10}$.) Dunque si deve risolvere il sistema $\begin{cases} x \equiv -1 \pmod 9 \\ x \equiv 1 \pmod{11} \end{cases}$, la cui più piccola soluzione positiva è 89. Dunque il resto cercato è 89.

5. Si consideri il reticolo $L = \{1, 2, 4\} \times \{1, 2, 4\}$, ordinato tramite la relazione d'ordine "$\leq$" cosi' definita: dati $(a, b) \in L$ e $(c, d) \in L$, $(a, b) \leq (c, d)$ se a divide c e b divide d.
(a) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di L: $A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4)\}$, $B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (4, 2), (4, 4)\}$. Stabilire se A è un sottoreticolo di L. Stabilire se B è un sottoreticolo di L.
(b) Determinare, se possibile, un elemento $x \in L$, diverso dal massimo e dal minimo, che ha complemento. Determinare, se possibile, un elemento $y \in L$ che non ha complemento.
(c) Determinare gli elementi irriducibili di L e determinare una decomposizione irridondante in irriducibili dell'elemento $(4, 4)$.

Soluzione. (a) A è un sottoreticolo, perchè $(1, 4) \wedge (2, 2) = (1, 2) \in A$ e $(1, 4) \vee (2, 2) = (2, 4) \in A$ (le altre condizioni sono banali, perchè le altre coppie di elementi si A sono in relazione). B non è un sottoreticolo, perchè, ad esempio $(1, 4) \vee (2, 2) = (2, 4) \notin B$.
(b) Ad esempio, $(1, 4)$ ha complemento: $(1, 4)' = (4, 1)$. Infatti $(1, 4) \wedge (4, 1) = (1, 1) = min\, L$, e $(1, 4) \vee (4, 1) = (4, 4) = max\, L$.
Invece, ad esempio, $(1, 2)$ non ha complemento. Infatti, le uniche coppie (a, b) tali che $(1, 2) \wedge (a, b) = (1, 1)$ sono $(2, 1)$ e $(4, 1)$, ma $(1, 2) \vee (2, 1) = (2, 2) \neq max\, L$ e $(1, 2) \vee (4, 1) = (4, 2) \neq max\, L$.
(c) Gli irriducibili di L sono: $(1, 2)$, $(2, 1)$ (atomi) e $(1, 4)$, $(4, 1)$.
$(4, 4) = (2, 4) \vee (4, 2) = \big((1, 4) \vee (2, 2)\big) \vee \big((2, 2), \vee (4, 1)\big) = (1, 4) \vee (2, 2) \vee (4, 1) = (1, 4) \vee (1, 2) \vee (2, 1) \vee (4, 1) = (1, 4) \vee (4, 1)$. La decomposizione richiesta è

$$(4, 4) = (1, 4) \vee (4, 1)$$

6. Si consideri la funzione booleana $F(x, y, z, t) = xy + y't + x'yz' + xy'zt'$.
(a) Scrivere $F(x, y, z, t)$ come somma di tutte le sue implicanti prime.
(b) Determinare un'espressione minimale di $F(x, y, z, t)$.

Soluzione.