COGNOME .... **NOME** .... Data di nascita.................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Tutte le risposte devono essere motivate da spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Dimostrare per induzione che $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^3} < \frac{7}{4} - \frac{1}{n}$ per ogni $n \geq 2$.

Soluzione. $n = 2$: $\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i^3} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} < \frac{10}{8} = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}$.
Passo induttivo. Ipotesi: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^3} < \frac{7}{4} - \frac{1}{n}$. Tesi: $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^3} < \frac{7}{4} - \frac{1}{n+1}$.

Dimostrazione del passo induttivo : $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^3} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^3} + \frac{1}{(n+1)^3} \overset{\text{ipotesi}}{<} \frac{7}{4} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3}$.
Quindi è sufficiente verificare che $\frac{7}{4} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{7}{4} - \frac{1}{n+1}$, cioè che $\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n+1} > 0$, cioè ancora, portando a denominatore comune, $\frac{(n+1)^3 - n - n(n+1)^2}{n(n+1)^3} > 0$. Poichè il denominatore è positivo, ciò è equivalente a verificare che il numeratore è positivo. il che si dimostra facilmente:
$(n+1)^3 - n - n(n+1)^2 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - n^3 - 2n^2 - n = n^2 + n + 1 > 0$ perchè $n > 0$.

2. Si consideri l'insieme $A = \{2,4,6\} \times \{2,4,6\}$, munito della relazione d'ordine "$\leq$" così definita: $(a,b) \leq (c,d)$ se e solo se: a divide c e b divide d.
(a) Scrivere il diagramma di Hasse di A.
(b) Determinare elementi minimali e massimali di A. Determinare minimo e massimo di A (se esistono).
(c) Determinare (se esiste) $inf\big((4,6),(6,4)\big)$.

Soluzione. (b) Minimali: $(2,2)$. Minimo: $(2,2)$. Massimali: $(4,4)$, $(4,6)$, $(6,4)$, $(6,6)$. Massimo: non esiste.
(c) Minoranti di $\{(4,6),(6,4)\} = \{(2,2)\}$. Quindi $inf\big((4,6),(6,4)\big) = (2,2)$.

3. Sia $A = \{n \in \mathbf{N} \mid n$ è multiplo di 3 e $n \geq 6\}$. (a) Determinare una funzione biettiva $f : \mathbf{Z} \to A$.
(b) Determinare una funzione $g : \mathbf{Z} \to A$ suriettiva ma non iniettiva.

Soluzione. (a) Per esempio: $f(k) = \begin{cases} 6k & \text{se } k > 0 \\ -6k+9 & \text{se } k \leq 0 \end{cases}$. Si osservi che f manda gli interi positivi nei naturali multipli di 6 e gli interi non positivi nei naturali della forma $n = 6h+3$, con $h \in \mathbf{N}$. Quindi è sufficiente verificare l'iniettività di f separatamente sugli interi positivi, e sugli inetri non positivi. Entrambe le cose sono immediate. Ad esempio, se $k_1 \neq k_2$ allora $6k_1 \neq 6k_2$. Suriettività: un multiplo di 3 maggiore o uguale a 6 è della forma $n = 6h$ oppure della forma $n = 6h+3$ (dove $h \in \mathbf{N}$). Nel primo caso $n = f(h)$. Nel secondo caso: $n = f(-h+1)$.
(b) Per esempio $g(k) = \begin{cases} k & \text{se } k \in A \\ 6 & \text{se } k \notin A \end{cases}$. È evidentemente suriettiva e non iniettiva.

4. Sia $A = \{1,2,4\} \times \{1,2,4\}$. Si consideri la relazione R su A così definita: dati $(a,b),(c,d) \in A$, $(a,b)R(c,d)$ se e solo se $ad = bc$.
Stabilire se R è una relazione di equivalenza e, in caso affermativo, descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza.

Soluzione. Riflessività: se $(a,b) \in A$, allora $(a,b)R(a,b)$. Infatti $ab = ba$.
Simmetria: siano $(a,b),(c,d) \in A$. Se $(a,b)R(c,d)$, cioè $ad = bc$, allora anche $cb = da$, dunque $(c,d)R(b,a)$.
Transitività: siano $(a,b),(c,d),(e,f) \in A$. Supponiamo che $(a,b)R(c,d)$ e $(c,d)R(e,f)$. Ciò significa che: (a) $ad = bc$; e (b) $cf = de$. Dunque $adf \overset{(a)}{=} bcf \overset{(b)}{=} bde$. Dunque, poichè $d \neq 0$, $af = de$. Quindi $(a,b)R(e,f)$.
Oppure, si può notare che $(a,b)R(c,d)$ se e solo se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. A questo punto le tre proprietà risultano immediatamente.

Classi di equivalenza: due coppie (a, b) e (c, d) sono in relazione se e solo se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Da questo segue immediatamente che le classi di equivalenza sono:
$\{(1,1),(2,2),(4,4)\}$ $\{(1,2),(2,4)\}$, $\{(1,4)\}$, $\{(2,1),(4,2)\}$, $\{(4,1)\}$.

5. Per ciascuna delle seguenti congruenze/sistemi di congruenze, determinare tutti gli $x \in \mathbf{Z}$ che le verificano: (a) $34x \equiv 4 \pmod{74}$, (b) $34x \equiv 21 \pmod{74}$, (c) $\begin{cases} 34x \equiv 4 \pmod{74} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$.

Soluzione. (b) Non ha soluzione perchè 21, essendo dispari, non è multiplo di $mcd(34, 74)$.
(a) $34x \equiv 4 \pmod{74}$ è equivalente a

$$17x \equiv 2 \pmod{37}$$

che ha soluzione unica $\pmod{37}$, perchè $mcd(17, 37) = 1$.
Con l'algoritmo euclideo si trova: $1 = 37 \cdot 6 + 17 \cdot (-13)$. Quindi $17 \cdot (-13) \equiv 1 \pmod{37}$. Moltiplicando per 2: $17 \cdot (-26) \equiv 2 \pmod{37}$. Dunque le soluzioni sono tutti i numeri interi congruenti $\pmod{37}$ a -26, dunque anche a 11, quindi sono i numeri interi

$$11 + 37k, \qquad \text{per ogni } k \in \mathbf{Z}.$$

(c) Per il punto (a)

$$\begin{cases} 34x \equiv 4 \pmod{74} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 11 \pmod{37} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Poichè $mcd(37, 3) = 1$ sappiamo già, per il teorema cinese dei resti, che le soluzioni esistono, uniche modulo $111 (= 37.3)$. Dalla prima equazione si ha

$$x = 11 + 37k, \qquad k \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Sostituendo nella seconda: $11 + 37k \equiv 2 \pmod{3}$ cioè, riducendo modulo 3:

$$k \equiv 0 \pmod{3},$$

cioè $k = 3h$, $h \in \mathbf{Z}$. Dunque, sostituendo nella (1):

$$x = 11 + 111h, \qquad h \in \mathbf{Z}.$$