ESERCIZI GEOMETRIA 2: CURVE

Es. 0.1 (Epicicloide)**.** L'*epicloide* è la curva tracciata da un punto P su un cerchio $\mathcal{C}$ che rotola senza scivolamenti su un altro cerchio fissato $\mathcal{C}_0$.

(a) Trovare una parametrizzazione dell'epicicloide supponendo che: (i) il cerchio $\mathcal{C}_0$ centro l'origine e raggio r_0; (ii) il cerchio $\mathcal{C}$ abbia centro A e raggio r; (iii) il punto iniziale sia $(0, r_0)$. Usare come parametro l'angolo (denotato θ) formato dal vettore $\vec{OA}$ con l'asse x.

(b) Determinare i punti non-regolari per $r_0 = 3$ e $r = 1$. Fare un disegno approssimativo.

(c) calcolare la funzione lunghezza d'arco dell'epicloide in funzione dell'angolo θ.

Es. 0.2 (Ipocicloide)**.** Stesse domanda (a) dell'esercizio precedente per l'*ipocicloide*, che è la curva tracciata da un punto P su un cerchio $\mathcal{C}$ che rotola senza scivolamenti all'interno di un altro cerchio fissato $\mathcal{C}_0$ (ovviamente in questo caso $r < r_0$).

(b) Determinare i punti non-regolari per $r_0 = 5$ e $r = 3$. Fare un disegno approssimativo.

(c) calcolare la funzione lunghezza d'arco dell'ipoicloide in funzione dell'angolo θ (notazione come nell'esercizio precedente).

Es. 0.3. Si consideri la curva $\mathbf{x}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2})$, $t \in (-2\pi, 2\pi)$.

(a) È una curva regolare?

(b) La curva sta:
- sia su una sfera S di centro l'origine;
- sul cilindro circolare retto avente come asse l'asse z, costruito su un cerchio C nel piano x, y.
Determinare il raggio della sfera S e il centro e il raggio del cerchio C.

Es. 0.4. Scrivere una parametrizzazione a velocità unitaria della curva $\mathbf{x}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Es. 0.5. Un punto $\mathbf{x}$ si muove in E^3 secondo la funzione

$$\mathbf{x}(t) = t\mathbf{v} + t^2\mathbf{w} + 2(\frac{2}{3}t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{v} \times \mathbf{w}$$

dove $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono due vettori di norma 1 che formano tra loro un ngolo di $\frac{\pi}{3}$. Quanto tempo ci mette il punto a percorrere, a partie dalla posizione iniziale $\mathbf{x}(0)$, un arco di lunghezza 12?

Es. 0.6. Mostrare che $\mathbf{x}(t) = (t, \sin t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{y}(t) = \log t, \sin(\log t), t)$, $t \in \mathbb{R}^+$ sono due parametrizzazioni della stessa curva.

Es. 0.7. Mostrare che la curva $\mathbf{x}(t) = (at, bt^2, t^3)$ è un'elica cilindrica trovando il vettore $\mathbf{v}$ e l'angolo θ tali che l'angolo tra il versore tangente alla curva e $\mathbf{v}$ è costante uguale a θ.

Es. 0.8. (a) Mostrare che una curva regolare C tale che tutte le tangenti nei punti di C hanno almeno un punto un comune è una retta.
(b) Mostrare che una curva regolare C tale che tutti i suoi piani osculatori hanno almeno un punto in comune è una curva piana (suggerimento: usare (a)).

Es. 0.9. Mostare che se $\mathbf{x}'(t)$ e $\mathbf{x}''(t)$ sono linearmente dipendenti per ogni t allora la curva è una retta.

Es. 0.10. Mostrare che la curva $\mathbf{x}(t) = (t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t})$ è contenuta in un piano e trovarlo.

Es. 0.11. Determinare tutte le funzioni f tali che la curva $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, f(t))$ è contenuta in un piano.

Es. 0.12. Sia $\mathcal{C} \subset E^2$ una curva con la seguente proprietà: per ogni punto $P \in \mathcal{C}$ la retta normale a C in P e la retta passante per l'origine e P formano un triangolo isoscele con base sull'asse delle x. Determinare la curva.

Es. 0.13. Sia $\mathcal{C} \subset E^2$ una curva con la seguente proprietà: per ogni punto $P \in \mathcal{C}$ si denotino rispettivamente A e B le intersezioni della retta normale a $\mathcal{C}$ in P rispettivamente con l'asse x e con l'asse y. Allora P è il punto di mezzo del segmento AB.

Supponendo che $(4, 5) \in \mathcal{C}$ determinare la curva $\mathcal{C}$.

Es. 0.14. O'Neill Es. 6(b) Sez. 3.5 p. 128.

Es. 0.15. Si consideri la curva $\mathbf{x}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ (è un esempio di *spirale logaritmica*).

(a) Dimostrare che il vettore velocità $\mathbf{x}'(t)$ forma un angolo costante con il vettore posizione $\mathbf{x}(t)$ e calcolare tale angolo.

(b) Trovare una riparametrizzazione a velocità unitaria di tale curva.

(c) Calcolare l'evoluta di tale curva (vedi O' Neill, nuova edizione, esercizio 13, Sez, 2.4., che abbiamo fatto).