Geometria. Esame scritto del 20-09-2017. Nome e Cognome:

1. Si considerino i seguenti piani di V_3:
$\Pi_1 = \{(1,2,-1) + s(-4,1,1) + t(2,1,-2) \mid s,t \in \mathbf{R}\}$
$\Pi_2 = \{(1,0,1) + s(2,-2,1) + t(-6,1,2) \mid s,t \in \mathbf{R}\}$
$\Pi_3 = \{(0,1,1) + s(1,-4,1)) + t(2,-2,-1) \mid s,t \in \mathbf{R}\}$.

Determinare equazioni cartesiane per i seguenti sottoinsiemi di V_3 e descriverli

(a) $\{X \in V_3 \mid d(X,\Pi_1) = 3\}$. (b) $\{X \in V_3 \mid d(X,\Pi_1) = d(X,\Pi_2)\}$.
(c) $\{X \in V_3 \mid d(X,\Pi_1) = d(X,\Pi_3)\}$.

Soluzione. Conviene passare alle equazioni cartesiane, che risultano essere:
$\Pi_1 :\ x + 2y + 2z = 3.$ $\Pi_2 :\ x + 2y + 2z = 3.$ $\Pi_3 :\ 2x + y + 2z = 3.$
(a) Si tratta dell'unione di due piani paralleli a Π_1:

$$d(X,\Pi_1) = 3 \Leftrightarrow \frac{|x+2y+2z-3|}{3} = 3 \Leftrightarrow \Big[x+2y+2z = 12 \text{ o } x+2y+z = -6\Big]$$

(b) Poichè Π_1 e Π_2 coincidono, il sottoinsieme i questione è banalmente tutto V_3.
(b) Si tratta dell'unione di due piani (sono i piano bisettori dei quattro "spicchi" in cui è diviso V_3 dai due piani Π_1 e Π_3):

$$d(X,\Pi_1) = d(X,\Pi_3) \Leftrightarrow \frac{|x+2y+2z-3|}{3} = \frac{|2x+y+2z-3|}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big[x - y = 0 \text{ o } 3x + 3y + 4z = 6\Big]$$

2. Si denoti con U lo spazio lineare dei polinomi reali di grado minore o uguale a 3. Si considerino le seguenti funzioni
(a) $T : U \to U,\ p(x) \mapsto x^2 p''(x) + p'(x)$
(b) $S : U \to U,\ \ p(x) \mapsto (x^2+1)p''(x-1)$
(c) $M : U \to U,\ \ p(x) \mapsto xp''(x-1)p'(x)$
(d) $N : U \to U,\ \ p(x) \mapsto x^2 p''(x-1) + p(x)$

Per ciascuna di esse stabilire se è una trasformazione lineare o no. In caso affermativo: (a) determinare dimensione e una base del nucleo; (b) determinare dimensione e una base dell'immagine.; (c) stabilire se è invertibile e, in caso affermativo scrivere esplicitamente la trasformazione inversa.

Soluzione. Usiamo la base $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$. Il vettore delle coordinate del polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ rispetto a $\mathcal{B}$ è (a,b,c,d). Scriveremo le varie funzioni in queste coordinate. In conseguenza della teoria, la funzione sarà una trasformazione lienare se

e solo se, in queste coordinate, si scrive come moltiplicazione per una matrice fissata: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

(a) In coordinate la funzione T è $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6a \\ 3a+2b \\ 2b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

Dunque è una trasformazione lineare. Si vede subito che il nucleo ha dimensione 1, precisamente $N(T) = L(1)$ (i polinomi di grado zero, cioè costanti). Il rango è 3 e una base dell'imagine è $\{x^3 + x^2, x^2 + x, 1\}$. Non è invertibile.

(b) In coordinate la funzione S è $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6a \\ -6a+2b \\ 6a \\ -6a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

Dunque è lineare. Rango 2. Base di $Im(S)$: $\{x^3 - x^2 + x - 1, x^2 + 1\}$. $\dim N(S) = 2$, base $\{x, 1\}$. Non invertibile.

(c) NON lineare. Ad esempio, si verifica subito che $M(\lambda p(x)) \neq \lambda M(p(x))$. Infatti $M(\lambda p(x)) = x(\lambda p''(x-1))(\lambda p'(x)) = \lambda^2 M(p(x))$.

(d) In coordinate la funzione N è $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7a \\ -6a+3b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

Dunque è lineare. $\dim N(T) = 0$. $Im(T) = U$. È invertibile. Calcoliamo la matrice inversa della matrice A:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \frac{6}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{6}{21} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice inversa è quella a destra. Dunque la trasformazione inversa è:

$$N^{-1}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \frac{a}{7}x^3 + (\frac{6a}{21} + \frac{b}{3})x^2 + cx + d.$$

3. Si denoti ancora con U lo spazio lineare dei polinomi reali di grado minore o uguale a 3. Si consideri la trasformazione lineare $T : V_3 \to U$ definita da: $T((1,2,3)) = x^3 - x + 1$, $T((1,-1,1)) = x^2 + x + 1$, $T((1,1,1)) = x^3 + 2x^2 + x + 3$.

(a) Determinare: (i) una base del nucleo del nucleo di T e (ii) una base dell'immagine di T (sia i vettori della base richiesta in (i) che i polinomi della base richiesta in (ii) devono scritti in modo esplicito).

(b) Stabilire se T è iniettiva. In caso affermativo spiegare perchè. In caso negativo mostrare esplicitamente due vettori $\mathbf{u}$ e $T(\mathbf{v})$ tale che $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$. Stabilie se T è suriettiva. In caso affermativo spiegare perchè. In caso negativo mostrare esplicitamente un polinomio che non sta nell'immagine di T.

Soluzione. Denotiamo $\mathcal{B} = \{(1,2,3),(1,-1,1),(1,1,1)\}$ (si verifica facilmente che è una base di V_3). Denotiamo anche $\mathcal{E}$ la base $\{x^3, x^2, x, 1\}$ di U. La matrice rappresentativa della trasformazione lineare T rispetto a queste due basi è

$$m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Effettuando un'eliminazione alla Gauss:

$$m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Il rango è 2. Dunque $\dim(Im(T)) = 2$ e come base possiamo ad esempio prendere $\{T(1,2,3), T(1,-1,1)\} = \{x^3 - x + 1, x^2 + x + 1\}$.
Si ha che $\dim N(T) = 1$. Risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T)$ si trova lo spazio delle soluzioni $L((-1,-2,1))$ Dunque una base del nucleo è

$$\{-1(1,2,3) - 2(1,-1,1) + 1(1,1,1)\} = \{(-2,1,-4)\}.$$

(b) T non è iniettiva, perchè $\dim N(T)) > 0$. Ad esempio $T((1,2,3)) = x^3 - x + 1$ e $T((-1,3,-1)) = T((1,2,3)+(-2,1,-4)) = T((1,2,3))+T((-2,1,-4)) = x^3-x+1+0 = x^3 - x + 1$.
T non è suriettiva perchè $\dim(Im(T)) < 4$. I polinomi di $Im(T)$ sono quelli della forma $\lambda(x^3 - x + 1) + \mu(x^2 + x + 1) = \lambda x^3 + \mu x^2 + (\mu - \lambda)x + \lambda + \mu$. Dunque l'unico polinomio di grado ≤ 1 che sta in $Im(T)$ è lo zero (perchè in questo caso si ha che necessariamente $\lambda = \mu = 0$). Dunque, ad esempio, ogni polinomio non-zero di grado ≤ 1, ad esempio $p(x) = x$, oppure $q(x) = 1$, non sta in $Im(T)$.

4. Si consideri il seguente sottospazio lineare di V_5: $W = L((1,0,1,0,1),(0,2,1,0,-1))$. Sia $R_W : V_5 \to V_5$ la riflessione ortogonale di V_5 rispetto a W. Sia infine $T : V_5 \to V_5$ la trasformazione lineare definita da: $T(\mathbf{v}) = R_W(\mathbf{v}) + \mathbf{v}$.
(a) Determinare autospazi ed autovalori della trasformazione lineare T. (b) Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di V_5 tale che la matrice rappresentativa $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$ è diagonale e, in caso affermativo, esibirne una.

(Si ricorda che, dato uno spazio lineare euclideo V e un suo sottospazio lineare W, la *riflessione di V rispetto a W* è la trasformazione lineare $R_W : V \to V$ così definita: dati $\mathbf{w} \in W$ e $\mathbf{s} \in W^\perp$, $R_W(\mathbf{w}+\mathbf{s}) = \mathbf{w}-\mathbf{s}$)).

Soluzione. Poichè $\dim V^5 = 5$ e $\dim W = 2$, $\dim W^\perp = 5-2 = 3$.
Se $\mathbf{w} \in W$ allora $T(\mathbf{w}) = R_W(\mathbf{w}) + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{w} = 2\mathbf{w}$. Dunque 2 è un autovalore ed il corrispondente autospazio $E_2(T)$ coincide con W.
Se $\mathbf{u} \in W^\perp$ allora $T((\mathbf{u}) = R_W(\mathbf{u}) + \mathbf{u} = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Dunque 0 è un autovalore ed il corrispondente autospazio (cioè il nucleio di T) coincide con $W^\perp$.
Ne segue che T è diagonalizzabile. Una base come richiesto (cioè una base diagonalizzante) si otterrà mettendo insieme la base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ di W data e una base di $W^\perp$, che si ottiene risolvendo il sistema $\begin{cases} \mathbf{w}_1 \cdot X = 0 \\ \mathbf{w}_2 \cdot X = 0 \end{cases}$.
In pratica cerchiamo 5-uple (x, y, z, t, s) tali che $\begin{cases} x + z + s = 0 \\ 2y + z - s = 0 \end{cases}$. Le soluzioni sono 5-uple della forma $(2y - 2s, y, -2y + s, t, s)$. Dunque una base di $W^\perp$ è

$$\{(2, 1, -2, 0, 0), (-2, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 0)\}.$$

Una base come richiesto è dunque

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 0, 1), (0, 2, 1, 0, -1), (2, 1, -2, 0, 0), (-2, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 0)\}$$

e $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = diag(2, 2, 0, 0, 0)$.