Geometria. Esame scritto del 28-06-2017. Nome e Cognome:

Motivare adeguatamente tutte le risposte.

1. Sia $P = (1,1,2)$, $A = (1,-2,2)$ and $B = (1,0,1)$. Sia L la retta $\{P + tA \mid t \in \mathbf{R}\}$ e sia S la retta $\{P + sB \mid s \in \mathbf{R}\}$.
(a) Determinare una coppia di punti (Q,R) con $Q \in L$ e $R \in S$ tali che: $d(P,Q) = 3d(P,R)$ e l'area del triangolo di vertici P, Q, R è uguale a $3\sqrt{2}$.
(b) Trovare *tutte* le coppie di punti (Q,R) come in (a) (cioè $Q \in L$ e $R \in S$ tali che: $d(P,Q) = 3d(P,R)$ e l'area del triangolo di vertici P, Q, R è uguale a $3\sqrt{2}$).

Soluzione. Sia $Q \in L$, allora, per un $t \in \mathbf{R}$, $Q = P + tA$, dunque $\|Q - P\| = \|tA\| = |t|\|A\| = 3|t|$.
Allo stesso modo, sia $R = P + sB \in S$. Allora $\|R - P\| = |s|\|B\| = \sqrt{2}|s|$. Abbiamo che $d(P,Q) = 3d(P,R)$ significa $3|t| = 3\sqrt{2}|s|$ cioè

$$|t| = \sqrt{2}|s|$$

Il triangolo di vertici P, $Q(t)$ e $R(s)$ ha area uguale a

$$\frac{1}{2}\|(Q(t) - P) \times (R(t) - P)\| = \frac{}{2}\|tA \times sB\| = \frac{|ts|}{2}\|A \times B\| = \frac{\sqrt{2}s^2}{2}\|(-2,-1,2)\| = \frac{3\sqrt{2}s^2}{2}$$

Dunque, se l'area deve essere uguale a $3\sqrt{2}$, deve essere che $s^2 = 2$, cioè

$$s = \pm\sqrt{2}$$

(a) Possiamo prendere $s = \sqrt{2}$ e $t = \sqrt{2}s = 2$. Dunque $Q = P + 2A$ e $R = P + \sqrt{2}B$.
(b) Le altre possibilità sono 3 (quindi le coppie sono in tutto 4):
- $s = -\sqrt{2}$ e $t = \sqrt{2}s = -2$ e dunque $(P - 2A, P - \sqrt{2}B)$.
- $s = \sqrt{2}$ e $t = -\sqrt{2}s = -2$ e dunque $(P - 2A, P + \sqrt{2}B)$
- $s = -\sqrt{2}$ e $t = -\sqrt{2}s = 2$ e dunque $(P + 2A, P - \sqrt{2}B)$.

2. Determinare quattro vettori non nulli di V_4 ortogonali a due a due e tali che tre di essi soddisfino l'equazione: $x_4 = x_1 + x_2 + x_3$.

Soluzione. Nota bene: dalla teoria sappiamo che: *quattro vettori non nulli di* V_4 *ortogonali a due a due* è sinonimo di *base ortogonale di* V_4. Dunque cerchiamo una base ortogonale di V_4, diciamo $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{s}\}$, tale che tre dei suoi vettori, ad esempio $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, stiano nel sottospazio U di V_4 costituito dalle soluzioni dell'equazione omogenea

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Il quarto vettore, cioè $\mathbf{s}$, ce l'abbiamo già: è $(1,1,1,-1)$ che, per definizione, è ortogonale a tutti i vettori di U (detto altrimenti: per definizione $U = L((1,1,1-1))^{\perp}$).

Per trovare $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ come sopra (cioè una base ortogonale di U) dobbiamo prendere una base qualsiasi di U e ortogonalizzarla secondo il Teorema di Gram-Schmidt. Per semplificare, possiamo, invece che partire da una base qualsiasi, partire da una base con due vettori già ortogonali, ad esempio:

$$\{(1,0,-1,0)\,,\,(0,1,0,1)\,,\,(0,0,1,1)\}$$

I primi due vettori sono già ortogonali, per trovare il terzo vettore della nostra base ortogonale di U applichiamo Gram-Schmidt:

$$(0,0,1,1) - \frac{-1}{2}(1,0,-1,0) - \frac{1}{2}(0,1,0,1) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Dunque quattro vettori come richiesto sono:

$$\{(1,0,-1,0)\,,\,(0,1,0,1)\,,\,(1,-1,1,1),(1,1,1,-1)\}$$

3. Sia P_3 lo spazio lineare dei polinomi reali di grado ≤ 3 munito del prodotto scalare

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\,,\,b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + 4a_3b_3$$

Siano inoltre $p(x) = x + x^2 - x^3$, $q(x) = 1 + x^2$ e $f(x) = 1 + x^3$. Scrivere $f(x)$ come somma di un polinomio ortogonale sia a $p(x)$ che a $q(x)$ e di un polinomio combinazione lineare di $p(x)$ e $q(x)$.

Soluzione. Dalla teoria: *scrivere $f(x)$ come somma di un polinomio ortogonale sia a $p(x)$ che a $q(x)$ e di un polinomio combinazione lineare di $p(x)$ e $q(x)$* è sinonimo di:
scrivere la decomposizione ortogonale di $f(x)$ come somma di un elemento di $L(p(x),q(x))^{\perp}$ e di un elemento di $L(p(x),q(x))$.
Per trovare la proiezione di $f(x)$ su $L(p(x),q(x))$ troviamo prima una base ortogonale di tale sottospazio:

$$q_1(x) = q(x) - (\frac{(q(x),p(x))}{(p(x),p(x))})p(x) = q(x) - \frac{1}{3}p(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

Poi:

$$p_{L(p(x),q(x))}(f(x)) = (\frac{(f(x),p(x))}{(p(x),p(x))})p(x) + (\frac{(f(x),q_1(x))}{(q_1(x),q_1(x))})q_1(x) = -\frac{2}{3}p(x) + \frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{3}}q_1(x) = -\frac{2}{3}p(x) + \frac{7}{5}q_1(x)$$

Dunque la decomposizione richiesta è

$$f(x) = (f(x) + \frac{2}{3}p(x) - \frac{7}{5}q_1(x)) + (-\frac{2}{3}p(x) + \frac{7}{5}q_1(x))$$

(Sostituite voi le varie espressioni e verificate che effettivamente il primo addendo sta in $L(p(x), q(x))^{\perp}$.

4. Siano $\mathbf{u} = (1, -1, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 2, 1)$ e si denoti $R : V_3 \to V_3$ la riflessione ortogonale rispetto a $L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.
Sia inoltre $T : V_3 \to V_3$ la trasformazione lineare così definita:

$$T(\mathbf{u}) = 2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}, \quad T(\mathbf{v}) = 2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}, \quad T(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

Si consideri infine la trasformazione lineare composta: $R \circ T : V_3 \to V_3$.
Determinare autovalori e autospazi di $R \circ T$. Stabilire se $R \circ T$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base $\mathcal{B}$ di V_3 tale che la matrice che rappresenta $R \circ T$ rispetto a $\mathcal{B}$ è diagonale.
(Si ricorda che, dato uno spazio lineare euclideo V e un suo sottospazio lineare W, la *riflessione di V rispetto a W* è la trasformazione lineare $R_W : V \to V$ così definita:
dati $\mathbf{w} \in W$ e $\mathbf{s} \in W^{\perp}$, $R_W(\mathbf{w} + \mathbf{s}) = \mathbf{w} - \mathbf{s}$)).

Soluzione. Consideriamo la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\}$ (è una base, vedi Apostol, Teorema 2.13(a)). Poichè $2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$,$2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$ e $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ appartengono a $L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, e $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ appartiene a $L(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{\perp}$, abbiamo che

$$R \circ T(\mathbf{u} = R(2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) = 2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

$$R \circ T(\mathbf{v}) = R(2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}) = 2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$$

$$R \circ T(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = R(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

In conclusione

$$B = m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(R \circ T) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dopo avere calcolato il polinomio caratteristico risulta facilmente che ci sono tre autovalori: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -1$. Dunque sappiamo giè che la trasformazione lineare è diagonalizzabile. Gli autospazi: calcoliamo E_1. Abbiamo che $1\, I_3 - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 - 1 & \\ -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Risolvendo il sistema omogeno risulta lo spazio delle soluzioni $L((-2, 1, 0))$ Dunque $E_1 = L(-2\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Allo stesso modo si trova: $E_6 = L(\mathbf{u} + 2\mathbf{v})$, $E_{-1} = L(4\mathbf{u} + \mathbf{v} - 14\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. La matrice è diagonalizzabile una base rdigonalizzante è: $\{-2\mathbf{u}+\mathbf{v}), \mathbf{u}+2\mathbf{v}, 4\mathbf{u}+\mathbf{v}-14\mathbf{u}\times\mathbf{v}\}$.

Altra versione:

4. Siano $\mathbf{u} = (-1, 1, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 2, 1)$ e si denoti $R : V_3 \to V_3$ la riflessione ortogonale rispetto a $L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.
Sia inoltre $T : V_3 \to V_3$ la trasformazione lineare così definita:

$$T(\mathbf{u}) = 2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}, \quad T(\mathbf{v}) = 2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}, \quad T(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

Si consideri infine la trasformazione lineare composta: $R \circ T : V_3 \to V_3$.
Determinare autovalori e autospazi di $R \circ T$. Stabilire se $R \circ T$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base $\mathcal{B}$ di V_3 tale che la matrice che rappresenta $R \circ T$ rispetto a $\mathcal{B}$ è diagonale.

Soluzione. Si ragiona allo stesso modo e questa la matrice che rappresenta $R \circ T$ nella base $\mathcal{B}$ è:

$$B = m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(R \circ T) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa volta $\lambda = 1$ è un autovalore doppio. Gli autospazi risultano, calcolando come nell'esercizio precedente, $E_1 = L(-2\mathbf{u} + \mathbf{v})$ e $E_6 == L(\mathbf{u} + 2\mathbf{v})$. Dunque $R \circ T$ NON è diagonalizzabile.