**Geometria.** **Esame scritto del 08-09-2017.** Nome e Cognome:

Motivare adeguatamente tutte le risposte.

**1.** Per le seguenti coppie di rette in $V_3$ stabilirne la posizione reciproca (cioè se sono parallele, incidenti o sghembe). Nel caso in cui siano incidenti, determinarne il punto di intersezione. Stabilire inoltre se esiste un piano che le contiene entrambe e, in caso affermativo, determinarne l'equazione cartesiana.

(a) $R = \{(-1,-4,-3) + t(1,3,1) \mid t \in \mathbf{R}\}$ , $S = \{(-1,3,-2) + t(2,-1,1) \mid t \in \mathbf{R}\}$.

(b) $L = \{(-1,-4,-3) + t(1,3,1) \mid t \in \mathbf{R}\}$ , $T = \{(1,0,1) + t(1,1,1) \mid t \in \mathbf{R}\}$.

*Soluzione.* Prima di cominciare ricordiamo che, date due rette in $V_3$, esiste un piano che le contiene entrambe se e solo se esse sono parallele o incidenti. Nel caso siano incidenti, detto $P$ il punto di intersezione, esse possono essere scritte nel modo seguente: $R = P + t\mathbf{v}$, $S = P + s\mathbf{w}$, $t, s \in \mathbf{R}$. Dunque il piano che le contiene ha equazione parametrica $P + t\mathbf{v} + s(\mathbf{w} \mid t, s \in \mathbf{R}\}$.

(a) È chiaro che non sono parallele. Sono incidenti se e solo se esistono due scalari $t$ e $s$ tali che $(-1,-4,-3) + t(1,3,1) = (-1,3,-2) + s(2,-1,1)$, cioè $t(1,3,1) + s(-2,1,-1) = (0,7,1)$. Dunque dobbiamo studiare il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & |0 \\ 3 & 1 & |7 \\ 1 & -1 & |1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & |0 \\ 0 & 7 & |7 \\ 0 & 1 & |1 \end{pmatrix}$$

Il sistema ammette soluzione, dunque le rette sono incidenti. Per trovare il punto di intersezione $P$ osserviamo che $s = 1$ dunque $P = (-1,3,-2) + 1(2,-1,1) = (1,2,-1)$.
Il piano che le contiene ha equazione parametrica $(1,2,-1)+t(1,3,1)+s(2,-1,1)$, $t, s \in \mathbf{R}$. Si ha che $(1,3,1) \times (2,-1,1) = (4,1,-7)$. Dunque l'equazione cartesiana è della forma $4x + y - 7z = d$. Poichè il piano contiene il punto $P$ si ha che $d = 13$. Dunque l'equaione cartesiana è

$$4x + y - 7z = 13$$

(b) Procediamo come sopra. Il sistema da studiare è $t(1,3,1) + s(-1,-1,-1) = (2,4,4)$. Dunque

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & |2 \\ 3 & -1 & |4 \\ 1 & -1 & |4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & |2 \\ 0 & 2 & |-2 \\ 0 & 0 & |2 \end{pmatrix}$$

Il sistema non ha soluzione. Dunque le rette non sono incidenti. Poichè evidentemente non sono nemmeno parallele, esse sono sghembe e non esiste nessun paino che le contiene entrambe.

**2.** Sia $P_3$ lo spazio lineare dei polinomi reali di grado $\leq 3$, munito del prodotto scalare

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$$

Siano $p(x) = 1 + x + x^3$ e $q(x) = x^2 - 2x^3$.

(a) Calcolare una base del sottospazio lineare $L(p(x), q(x))^\perp$.

(b) Trovare una base ortogonale $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)\}$ di $P_3$ tale che $f_3(x)$ e $f_4(x)$ sono combinazione lineare di $p(x)$ e $q(x)$.

*Soluzione.* (a) $L(p(x), q(x))^\perp$ è il sottospazio i cui elementi sono i polinomi $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ tali che $\begin{cases} (p(x), f(x)) = 0 \\ q(x), f(x)) = 0 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} a_0 + a_1 + 2a_3 & =0 \\ a_2 - 4a_3 = 0 \end{cases}$. Come si vede facilmente, una base per lo spazio delle soluzioni dell'ultimo sistema è $\{(-1, 1, 0, 0), (-2, 0, 4, 1)\}$. Dunque una base del sottospazio $L(p(x), q(x))^\perp$ è $\{-1 + x\,, -2 + 4x^2 + x^3\}$.

(b) Si richiede che $f_3(x)$ e $f_4(x)$ siano nel sottospazio $L(p(x), q(x))$. Poichè devono essere ortogonali, deve essere che $\{f_3(x), f_4(x)\}$ è una base ortogonale di $L(p(x), q(x))$. Dunque, per trovare due polinomi $f_3(x)$, $f_4(x)$ come richiesto sarà sufficiente ortogonalizzare $\{p(x), q(x)\}$.

Per quanto riguarda $f_1(x)$ e $f_2(x)$, essi devono essere ortogonali tra loro e a anche ortogonali a $f_3(x)$ e $f_4(x)$, dunque devono essere ortogonali al sottospazio $L(p(x), q(x))$. Dunque si richiede che $\{f_1(x), f_2(x)\}$ sia una base ortogonale del sottospazio $L(p(x), q(x))^\perp$. In conclusione, per trovare due polinomi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ come richiesto sarà sufficiente ortogonalizzare la base, chiamiamola $\{u(x), w(x)\}$, del sottospazio $L(p(x), q(x))^\perp$ trovata al punto (a).

Detto questo, procediamo con il calcolo.
$f_1(x) = u(x) = -1 + x$.
$f_2(x) = w(x) - \frac{(w(x),u(x))}{(u(x),u(x))}u(x) = w(x) - \frac{2}{2}u(x) = 1 + x - 4x^2 - x^3$.
$f_3(x) = p(x) = 1 + x + x^3$.
$f_4(x) = q(x) - \frac{(q(x),p(x))}{(p(x),p(x))}p(x) = q(x) - \frac{-4}{4}p(x) = 1 + x + x^2 - x^3$.

In conclusione una base come richiesto è

$$\{-1 + x\,,\ 1 + x - 4x^2 - x^3\,,\ 1 + x + x^3, 1 + x + x^2 - x^3\}$$

**3.** Si consideri, al variare di $a \in \mathbf{R}$, la trasformazione lineare $T_a : V_4 \to V_4$ definita da:

$$T_a(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

(a) Determinare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, $\dim T_a(V_4)$.

(b) Sia $\mathbf{v}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$. Determinare tutte le coppie $(a, b)$ tali che $\mathbf{v}_b \in T_a(V_4)$.

*Soluzione.* Si noti che $\dim T_a(V_4)$ è il rango della matrice $A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$. Visto che ci sono nolti zeri, la strada più breve consiste nello stabilire quando la matrice ha determinante non zero, cioè quando ha rango 4. Sviluppando dalla seconda riga si ha che il determinante è uguale a $\det \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = a(a^2 - 4)$. Ne segue che per $a \neq 0, 2, -2$ la matrice ha rango 4. Dunque, in questo caso per forza $v_b \in T(V_4)$. I casi $a = 0, 2, -2$ si possono studiare separatamente. Si può rispondere alle domande (a) e (b) contemporaneamente.
Cominciamo dal caso $a = 0$. Il fatto che $\mathbf{v_b} \in T_0(V_4)$ significa che esiste un vettore $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tale che $A_0 X = \mathbf{v_b}$, cioè che il sistema $A_0 X = \mathbf{v}_b$ ha soluzione. Dunque studiamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & |0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & |1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & |b \end{pmatrix}$$

Dalla prima e quarta riga si vede che questo sistema ha soluzione se e solo se $b = 1$. Inoltre si vede subito che il rango di $A_0$ è uguale a 3.

$a = 2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & |0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & |1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & |b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & |0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & |b \end{pmatrix}$$

Da cui si vede che il rango di $A_2$ è uguale a 3 e il sistema ha soluzione se solo se $b = 0$.

$a = -2$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & |0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & |1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & |b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & |2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & |b \end{pmatrix}$$

da cui si vede che il rango di $A_{-2}$ è uguale 3 e il sistema ha soluzione se e solo se $b = -2$.

Riassumendo, le risposte alle due domande sono:

(a) $\dim T_a(V_4) = 4$ se $a \neq 0, 2, -2$. $\dim T_a(V_4) = 3$ se $a = 0, 2, -2$.
(b) Tutte le coppie $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ con $a \neq 0, 2, -2$ e le coppie $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(-2, -2)$.

**4.** Al variare di $\theta \in [0, 2\pi)$ sia $R_\theta : V_2 \to V_2$ la rotazione di angolo $\theta$, in senso antiorario, di centro l'origine. Stabilire per quali valori di $\theta$ esiste una base di $V_2$ composta da autovettori di $R_\theta$ e, per tali valori di $\theta$, determinare una tale base e la matrice rappresentativa di $R_\theta$ rispetto ad essa.

*Soluzione.* Questo esercizio è già stato svolto a lezione. È chiaro che una rotazione di centro l'origine non può avere nessun autovettore: ogni vettore viene ruotato di angolo $\theta$, e dunque non può andare a finite in un suo multiplo. Dunque, a maggior ragione, non può esistere una base di autovettori. Questo con due eccezioni: la prima è $\theta = 0$. La rotazione di angolo $\theta = 0$ non è altro che l'identità: $R_0(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Dunque ogni vettore non nullo è un autovettore di autovalore 1. Ogni base di $V_2$ è una base di autovettori e la relativa matrice rappresentativa è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'altra eccezione è $\theta = \pi$. Questa rotazione si riduce a mandare ogni vettore nel suo opposto: $R_\pi(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$. Dunque ogni vettore non nullo è un autovettore, di autovalore $-1$. Ne segue che ogni base di $V_2$ è una base di autovettori, e la matrice rappresentativa è $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si può ottenere analiticamente lo stesso risultato studiando gli zeri del polinomio caratteristico.