Esercizi 8

1. In V_4, munito del prodotto scalare ordinario, sia $W = L((1,0,1,1),(0,1,1,1))$ e sia $\mathbf{v} = (1,2,-1,-2)$. Scrivere $\mathbf{v}$ come somma di un vettore in W e di un vettore perpendicolare a W.

2. In V_4, munito del prodotto scalare ordinario, sia $W = \{(x,y,z,t) \,|\, 3x-2y+z-2t=0\}$ e sia $\mathbf{v} = (1,-1,1,1)$. Calcolare la distanza tra $\mathbf{v}$ e W e l'elemento di W più vicino a $\mathbf{v}$.

3. In V_4, munito del prodotto scalare ordinario, sia $W = \{(x,y,z,t) \mid x+y-z+t=0\}$. Determinare una base ortogonale di V_4 che abbia tre elementi in W.

4. Sia P_3 lo spazio lineare dei polinomi reali di grado ≤ 3. Quali delle formule seguenti definisce un prodotto scalare su P_3?
(a) $(p(x),q(x)) = |p(1)q(1)| + |p(0)q(0)| + |p(-1)q(-1)|$;
(b) $(p(x),q(x)) = \int_{-1}^{1} p'(x)q'(x)dx$;
(c) $(p(x)q(x) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$;
(d) $(p(x),q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + p(2)q(2)$.

5. In V_4, munito del prodotto scalare ordinario, sia $W = \{(x,y,z,t) \mid x-y-z+t=0\}$ e sia $\mathbf{v} = (1,0,-1,0)$. Scrivere $\mathbf{v}$ come somma di un elemento di W e di un vettore perpendicolare a W.

6. In V_4, munito del prodotto scalare ordinario, siano $\mathbf{u} = (1,0,1,0)$, $\mathbf{v} = (1,-1,1,1)$, $\mathbf{w} = (0,1,1,-1)$. Determinare un insieme ortogonale $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ tale che $L(\mathbf{a}) = L(\mathbf{v})$, $L(\mathbf{a},\mathbf{b}) = L(\mathbf{v},\mathbf{w})$ e $L(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = L(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$.

7. Sia $W = L((1,1,-2,1),(1,0,1,0))$ Determinare una base ortogonale di V_4 (munito del prodotto ortogonale ordinario) $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{t}\}$ tale che $L(\mathbf{u},\mathbf{v}) = W$.

8. Sia P_2 lo spazio lineare dei polinomi reali di grado ≤ 2 munito del prodotto scalare

$$(p(x),q(x)) = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''q''(0)$$

Trovare due polinomi $p(x), q(x) \in P_2$ tali che $x^2 = p(x) + q(x)$ che soddifino le proprietà seguenti:
- $p(-1) = 0$
$q(x)$ è ortogonale a tutti i polinomi $f(x) \in P_2$ tali che $f(-1) = 0$.

9. Sia P_3 lo spazio lineare dei polinomi reali di grado ≤ 3 munito del prodotto scalare

$$(p(x),q(x)) = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''q''(0) + p(1)q(1)$$

Sia W il sottospazio lineare di P_3 i cui elementi sono i polinomi reali di grado ≤ 2. calcolare la proiezione ortogonale del polinomio x^3 su W e la distanza tra il polinomio x^3 e W.