Esercizi 6

1. Si denoti P_2 lo spazio lineare di tutti i polinomi di grado ≤ 2. Per ognuno dei seguenti due sottoinsiemi $U \subseteq P_2$ determinare: (a) Se sono sottospazi lineari di P_2; (b) In caso affermativo, la dimensione di U e due diverse basi di U.
(i) $U = \{f \in P_2 \mid f'(1) + f(0) = 0\}$;
(ii) $U = \{f \in P_2 \mid (2x+1)f'(x) = f(2x)\}$;
(iii) $U = \{f \in P_2 \mid xf'(x) = f(x) + 1\}$;
(iv) $U = \{f \in P_2 \mid xf'(x) = f(x+1)\}$;
(v) $U = \{f \in P_2 \mid (x+1)f'(x) = f(x)\}$;
(vi) $U = \{f \in P_2 \mid (x-1)f'(x) - 2f(x) = 0\}$.

2. Si consideri il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x+y+z & =0 \\ x-2y-z & =0 \\ x+y-z & =0 \\ -x+y & =0 \end{cases}$.
(a) Determinare la dimensione e una base del suo spazio delle soluzioni.
(b) Al variare di $t \in \mathbf{R}$ si consideri il sistema lineare $\begin{cases} x+y+z & =1 \\ x-2y-z & =0 \\ x+y-z & =\mathrm{t} \\ -x+y & =2 \end{cases}$. Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ il sistema ha soluzioni.

3. Siano $\mathbf{v}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_3 = (?1,0,1)$, $\mathbf{u} = (1,2,3)$. Per a che varia in $\mathbf{R}$ si consideri il sottospazio lineare $W_a = L(a\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_3)$. Trovare i valori di a tali che $\mathbf{u} \in W_a$ e, in caso affermativo. i valori di a tali che la combinazione lineare che esprime $\mathbf{u}$ è unica.

4. Sia P_2 lo spazio lineare dei polinomi di grado ≤ 2. Siano inolre: $p(t) = t^2?t?1$, $q(t) = 2t^2?t$, $r(t) = t^2?2t$.
(a) Stabilire (dimostrando) se il seguente enunciato è vero o falso: $\{p(t), q(t), r(t)\}$ è una base di P_2.
(b) Sia $f(t) = t+1$. È possibile scrivere $f(t)$ come combinazione lineare di $p(t)$, $q(t)$ and $r(t)$? Se la risposta è affermativa scriverne espicitamente una. È unica?

5. Sia $W = L((1,1,2),(1,2,3),(2,2,4),(-1,-1,0) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ e sia $U = \{\mathbf{u} \in V_3 \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W\}$.
(a) Determinare dimensione e una base di W. Lo stesso per U.
(b) Il vettore $\mathbf{u} = (1,-1,0)$ appartiene a W? In caso affermativo, la combinazione lineare di $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ che esprime $\mathbf{u}$ è unica?