Geometria. Esame scritto del 28-06-2017. Nome e Cognome:

Motivare adeguatamente tutte le risposte.

1. In V_3, munito del prodotto scalare ordinario, siano $\mathbf{u} = (2, 1, 2)$ e $\mathbf{v} = (-1, 2, -2)$ e sia $U = L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ il sottospazio generato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
(a) Determinare tutti i versori $\mathbf{w} \in U$ che formano un angolo di $\pi/3$ con $\mathbf{u}$.
(b) Scegliere uno dei versori $\mathbf{w}$ del punto (a) e trovare un vettore $\mathbf{a} \in U$ e un vettore $\mathbf{b} \in V_3$ tali che $\{\mathbf{w}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ sia una base ortogonale di V_3.

2. In V_2, munito del prodotto scalare ordinario, sia $\mathbf{v} = (1, 2)$. Sia $R_{(3\pi)/4} : V_2 \to V_2$ la rotazione di V_2 di angolo $(3\pi)/4$ (in senso antiorario) e sia $P_{L(\mathbf{v})} : V_2 \to V_2$ la proiezione su $L(\mathbf{v})$. Sia $T : V_2 \to V_2$ la trasformazione lineare $T = P_{L(\mathbf{v})} \circ R_{(3\pi)/4}$ (cioè $T(\mathbf{u}) = P_{L(\mathbf{v})}(R_{(3\pi)/4}(\mathbf{u}))$.
(a) Determinare il nucleo di T.
(b) Determinare autovalori e autospazi di T.

3. Si consideri, al variare di U e A in $\mathbf{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z + t & =1 \\ 2x + Uy + 2z + 2t & =\text{A+2} \\ \quad\; y \qquad\;\; + t & =1 \\ 6x + 7y + Uz + t & =\text{-1} \end{cases}$$

Stabilire per quali coppie (U, A) vi sono soluzioni. Per le coppie (U, A) per cui vi sono infinite soluzioni (se ne esistono), calcolare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

4. Denotiamo con P_n lo spazio lineare dei polinomi reali di grado $\leq n$.
Sia $T : P_3 \to P_2$ la trasformazione lineare così definita:
$T((x+1)^3) = x^2-x$, $T((x+1)^2) = x^2+x+2$, $T(x+1) = 2x^2+x+3$, $T(1) = -x^2+2x+1$.
(a) T è iniettiva? In caso affermativo spiegare perchè. In caso negativo produrre esplicitamente due polinomi non nulli $p(x), q(x) \in P_3$ tali che $T(p(x)) = T((q(x))$.
(b) T è suriettiva? In caso affermativo spiegare perchè. In caso negativo produrre esplicitamente un polinomio $f(x) \in P_2$ tale che $f(x) \notin T(P_3)$.