Geometria. Esame scritto del 26-0602017.

1. Per $a,b\in\mathbf{R}$ si considerino il piano $M_a=\{(\frac{1}{2},0,0)+t(3,0,-2)+s(a,-5,a)\,|\,t,s\in\mathbf{R}\}$ e la retta $L_b=\{(-1,b,-1)+t(1,1,1)\,|\,t\in\mathbf{R}\}$. Determinare tutte le coppie (a,b) tali che la retta L_b è contenuta nel piano M_a. Per tali coppie (a,b) determinare la retta contenuta in M_a, perpendicolare a L_b e passante per $(-1,b,-1)$.

Soluzione. Calcoliamo l'equazione cartesiana di M_a: $2x+ay+3z=1$. Se la retta L_b è contenuta in M_a la direzione di L_b, cioè $L((1,1,1))$ deve essere contenuta nella direzione diM_a, dunque deve soddisfare l'equazione $2x+ay+3z=0$. Segue che $a=-5$. Inoltre il punto $(-1,b,-1)$ deve verificare l'equazione di M_{-5}: $2x-5y+3z=1$. Dunque: $b=-\frac{6}{5}$. Quindi $(a,b)=(-5,-\frac{6}{5})$.

L'ultima domanda: la retta cercata deve verificare l'equazione cartesiana di M_{-5} e deve essere anche perpendicolare a $(1,1,1)$. Dunque deve verificare anche l'equazione cartesiana: $x+y+z=-\frac{16}{5}$. In conclusione la retta ha equazioni cartesiane $\begin{cases}2x-5y+3z=1\\ x+y+z=-\frac{16}{5}\end{cases}$.

2. In V_4, munito del prodotto scalare ordinario, si consideri il vettore $\mathbf{v}=(1,2,1,-1)$. Tra tutti i vettori (x,y,z,t) di V_4 tali che $\begin{cases}x+y-z+t=0\\ x+y-z-t=0\end{cases}$ determinare quello che ha distanza minima da $\mathbf{v}$.

Soluzione. Sia W lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $\begin{cases}x+y-z+t=0\\ x+y-z-t=0\end{cases}$. Il vettore richiesto è la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su W.

Primo modo. Calcoliamo una base di W, ad esempio: $\{(-1,1,0,0),(1,0,1,0)\}$. Ortogonalizziamola, ad esempio: $\{(-1,1,0,0),(1,1,2,0)\}$ e calcoliamo la somma delle proiezioni di $\mathbf{v}$ lungo i vettori della base ortogonale. Il risultato è $\frac{1}{2}(-1,1,0,0)+\frac{5}{6}(1,1,2,0)$.

Secondo modo. Sappiamo, per definizione, che $W^\perp=L((1,1,-1,1),(1,1,-1,-1))$. Calcoliamo, come sopra, $P_{W^\perp}(\mathbf{v})$, la proiezione di $\mathbf{v}$ su $W^\perp$. Il vettore cercato è $\mathbf{v}-P_{W^\perp}(\mathbf{v})$.

3. Sia P_2 lo spazio lineare dei polinomi reali di grado ≤ 2. Si consideri la trasformazione lineare $T:P_2\to P_2$ tale che

$$T(x+1)=x^2+1,\quad T(x-1)=x^2-2x+1,\quad \text{e}\quad T((x+1)^2)=x^2-x-1.$$

Dati $a,b,c\in\mathbf{R}$ determinare il polinomio $T^{-1}(ax^2+bx+c)$ in funzione di a,b,c.

Soluzione. Sia $\mathcal{E}=\{x^2,x,1\}$ la base standard di P_2 e $\mathcal{B}=\{x+1,x-1,(x+1)^2\}$ (è facile vedere che è un'altra base di P_2). Abbiamo che $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(T)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

Dunque $m^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(T^{-1}) = \left(m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(T)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (l'inversa può essere calcolata con l'eliminazione di gauss oppure con i determinanti).
Ciò significa che

$$T^{-1}(ax^2+bx+c) = (\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c)(x+1)+(-\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c)(x-1)+(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}c)(x^2-x-1) =$$

$$(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c)x^2 + (\frac{3}{4}a + c)x + \frac{5}{4}a + b + \frac{1}{2}$$

4. Sia $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Verificare che $\lambda = 1$ è un autovalore di A. Determinare gli altri autovalori di A (non si richiede di calcolare il polinomio caratteristico di A). Determinare (se esiste) una matrice invertibile C tale che $C^{-1}AC$ è una matrice diagonale (non si richiede di calcolare C^{-1}).

Soluzione. Per verificare che $\lambda = 1$ è un autovalore di A non dobbiamo fare altro che verificare la nullità del determinante $\det(1I_3 - A) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, ovviamente zero. Già che ci siamo calcoliamo l'autospazio, che ha dimensione due: $E_1 = L((-1,1,0),(-1,0,1))$.

Per calcolare gli altri zeri del polinomio caratteristico, λ_2 e λ_3, usiamo che

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + \lambda_2 + \lambda_3 = Tr(A) = \frac{3}{2} \\ \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 = 1\,\lambda_2\,\lambda_3 = \det(A) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Segue, con un piccolo calcolo, che $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$.

Calcoliamo ora l'autospazio di $-\frac{1}{2}$. Abbiamo che $-\frac{1}{2}I_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$. Con un breve calcolo segue che $E_{-\frac{1}{2}} = L((3,1,1))$. Dunque la matrice è diagonalizzabile perchè abbiamo una base di V_3 composta da autovettori di A: $\mathcal{B} = \{(-1,1,0),(-1,0,1),(3,1,1)\}$.

Dunque una matrice C come richiesto esiste, ed è $C = m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Risulta che $C^{-1}AC = diag(1,1,-\frac{1}{2})$.