## Esercizi 11

**1.** Le seguenti matrici sono invertibili? In caso affermativo calcolarne l'inversa.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**2.** Si consideri, al variare di $a \in \mathbf{R}$, la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$. (a) Stabilire per quali $a \in \mathbf{R}$ la matrice $M_a$ non è invertibile, e calcolarne il rango. (b) Per gli $a \in \mathbf{R}$ tali che $M_a$ è invertibile, calcolare (in funzione del parametro $a$) la matrice inversa $M_a^{-1}$.

**3.** Si consideri la sequente base di $V_3$: $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \{(1,0,0), (1,2,0), (1,2,1)\}$. Sia $T : V_3 \to V_3$ la trasformazione lineare tale che $T(\mathbf{u}) = (1,1,0)$, $T(\mathbf{v}) = (1,2,0)$, $T(\mathbf{w}) = (1,1,-1)$. (a) Calcolare $m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T)$ e $m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T)$, dove $\mathcal{E}$ è la base standard di $V_3$. (b) Stabilire se $T$ è invertibile e, in caso affermativo, calcolare $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(T^{-1})$ e $m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T^{-1})$.

**4.** Sia $T : V_3 \to V_3$ la trasformazione lineare definita da $T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x+5y-2z \\ -x-y+z \\ 5x-y-2z \end{pmatrix}$.

(a) É iniettiva? In caso affermativo, spiegare perchè. In caso negativo, mostrare due vettori diversi tra loro, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3$ tali che $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$.
(b) È suriettiva? In caso affermativo spiegare perchè. In caso negativo mostrare un vettore $\mathbf{w} \in V_3$ tale che $\mathbf{w} \notin T(V_3)$.

**5.** Sia $P_2$ lo spazio lineare dei polinomi reali di grado $\leq 2$. Sia $T : P_2 \to P_2$ definita da $T(a+bx+cx^2) = a+b+b(x_1)+c(x+1)^2$. Stabilire se $T$ è invertibile e, in caso affermativo, scrivere una formula per $T^{-1}(d+ex+fx^2)$.

**6.** Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. (a) Stabilire se esistono matrici $X$ tali che $AX = C$ e, in caso affermativo, descriverle. (b) Stabilire se esistono matrici $Y$ tali che $BY = C$ e, in caso affermativo, descriverle.

**7.** Sia $T : V_2 \to V_2$ la trasformazione lineare tale che $T((1,-2)) = (1,1)$ e $T((-1.1)) = (2,0)$. Trovare (se esistono) tutti gli $(x,y) \in V_2$ tali che $T((x,y)) = (-2,3)$.

**8.** Si considerino al variare di $t \in \mathbf{R}$ i vettori

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{r}_t\} = \{(1,0,-1,0), (0,1,0,1), (3,-2,-3,-2), (1+t,2,-2,2)\}.$$

Trovare dimensione e una base dello spazio lineare $L(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{r}_t)$.

**9.** Sia $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione così definita: $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{x}$ (dove $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$ significa prodotto scalare di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$).
Determinare la funzione inversa di $T$.

**10.** Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e sia $V = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Sia inoltre $T : V \to V$ l'applicazione lineare così definita:

$$T(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\mathbf{v}_2 + (\lambda_1 + 3\lambda_2)\mathbf{v}_3$$

(a) Determinare una base di $\ker T$. Determinare una base di $\mathrm{Im}\, T$.
(b) Stabilire se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene a $\mathrm{Im}\, T$.

**11.** Siano $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
(a) Calcolare $T(3\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w})$;

**12.** Si consideri, al variare di $t \in \mathbf{R}$, l'applicazione lineare $L_t : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita come segue: $L_t(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x + ty + 2z \\ 6x + 7y + tz \end{pmatrix}$. Inoltre si denoti, al variare di $a \in \mathbf{R}$, $\mathbf{v}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$.
(a) Stabilire per quali coppie $(t, a)$ il vettore $\mathbf{v}_a$ appartiene all'immagine di $L_t$.
(b) Stabilire per quali coppie $(t, a)$ l'insieme $\{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3 \mid L_t(\mathbf{u}) = \mathbf{v}_a\}$ è infinito e calcolarlo esplicitamente.

**13.** Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:
$T(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Stabilire se $T$ è iniettiva, nel modo seguente: se lo è, spiegare bene perchè. Se non lo è, trovare esplicitamente due vettori diversi di $\mathbf{R}^3$ che hanno stessa immagine tramite $T$.
(b) Stabilire se $T$ è suriettiva, nel modo seguente: se lo è, spiegare bene perchè. Se non lo è, trovare esplicitamente un vettore di $\mathbf{R}^3$ che non sta nell'immagine di $T$ (spiegando perchè).

(c) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Esistono dei vettori di $\mathbf{R}^3$ $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ tali che $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$? In caso negativo spiegare bene perchè. In caso affermativo determinarli tutti.

**14.** Calcolare $\det \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$