## Esercizi 10

**1.** Sia $P_2$ lo spazio lineare dei polinomi di grado $\leq 2$. Sia $T : P_2 \to P_2$ la seguente trasformazione lineare:

$$T(p(x)) = p'(x-1) - 2p(x)$$

(a) Trovare dimensione e una base di $N(T)$ e $T(P_2)$.
(b) Trovare la matrice rappresentativa $m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T)$. (LAG secondo esame 2017)

**2.** Sia $T : V_3 \to V_4$ la trasformazione lineare definita da

$$T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-2y-z \\ x+y-z \\ -x+y \end{pmatrix}$$

(a) Trovare dimensione e una base di $T(V_3)$, $N(T)$, $(N(T))^{\perp}$.
(b) Per $t \in \mathbf{R}$ sia $v_t = (1, 0, t, 2)$. Trovare tutti i $t \in \mathbf{R}$ tali che $v_t \in T(V_3.)$
(c) Trovare due vettori diversi dal vettore nullo, e diversi tra loro, $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V_3$ tali che $T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{w})$ (LAG 7th indermediate test 2013-'14)

**3.** Sia $T : V_3 \to V_4$ la trasformazione lineare definita da $T((1,1,0)) = (1,0,-1,0)$, $T((0,1,1)) = (0,1,0,1)$, $T((1,0,1)) = (3,-2,-3,-2)$. Determinare dimensione e una base di $N(T)$ e dimensione e una base di $T(V_3)$. (test n.7 - 2016 LAG)

**4.** Sia $P_2$ lo spazio lineare dei polinomi reali di grado $\leq 2$. Determinare quali delle seguenti funzioni $T : P_2 \to P_2$ sono trasformazioni lineari e per ciascuna di esse determinare dimensione e una base di $N(T)$ e $T(V)$
(a) $T(p(x)) = xp'(x) - p(x) - 1$;
(b) $T(p(x)) = xp'(x) - p(x+1)$;
(c) $T(p(x)) = (x+1)p'(x) - p(x)$. (LAG 5ta sessione 2013-'14)

**5.** Sia $P_2$ lo spazio lineare dei polinomi reali di grado $\leq 2$. Consideriamo le seguenti basi di $P_2$ : $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ and $\mathcal{C} = \{1, x+1, (x+1)^2\}$. Sia $T : V \to V$ la trasformazione lineare definita da $T(1) = x$, $T((x+1)) = x^2 + x$, $T((x+1)^2) = x + 2$.
(a) Scrivere le matrici rappresentative $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$, $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T)$, $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T)$, $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$.
(b) Calcolare $T(1 - 3x + 2x^2)$ (test n.6 -2016 LAG) .

**6.** (a) Calcolare dimensione e una base di $N(T)$ e $T(V_3)$ per la seguente trasformazione lineare $T : V_4 \to V_3$:

$$T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x-y+z+t \\ x+y+2z+t \\ x-5y-z+t \end{pmatrix}$$

(LAG test n. 6 2014-'15)

**7.** Sia $P_2$ lo spazio dei polinomi reali di grado $\leq 2$. Scrivere quali delle seguenti funzioni $T : P_2 \to P_2$ sono trasformazioni lineari e, per ciascuna di esse calcolare la matrice $m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T)$, dove $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$. Calcololare inoltre $N(T)$ e $T(V_3)$.
(a) $T(p(x)) = p(x-1)$; (b) $T(p(x)) = p(x)+3x$; (c) $T(p(x)) = 2p(x)-(x+1)p'(x+1)$.
(LAG test n. 6 2014-'15 e primo esame 2014-'15)

**8.** Sia $T : V_4 \to V_3$ così definita:

$$T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x - y + z + t \\ x + y - z - t \\ -x + 2y - 2z - 2t \end{pmatrix}$$

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene a $T(V_4)$? Se la risposta è affermativa descrivere l'insieme di tutti gli elementi $\sqsupseteq \in V_4$ tali che $T(\sqsupseteq) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
(b) $T$ è suriettiva? (LAG secondo esame 2014-'15)

**9.** Sia $T : V_3 \to V_3$ la funzione così definita: $T((x, y, z)) = (1, 2, -1) \times (x, y, z)$. (a) É lineare? (b) In caso di risposta affermativa calo;are dimensione e una base di $N(T)$ e fare lo stesso per $T(V_3)$. (LAG 3 esame 2010-'11)

**10.** Sia $V = L((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, -1))$ e sia $R_W : V_4 \to V_4$ la riflessione ortogonale rispetto a $W$. Calcolare la matrice di $R_W$ rispetto alla base standard. (LAG 1 esame 2012-'13)

**11.** Per ciascuna delle funzioni $T : V_2 \to V_2$ definite nel seguito, stabilire se è una rasformazione lineare e, in caso affermativo, calcolarne nucleo, immagine e matrice rispetto alla base standard.
(a) $T$ manda $\underline{O}$ in $\underline{O}$ e manda il punto di coordinate polari $(\rho, \theta)$ nel punto di coordinate polari $(2\rho, \theta + \pi/3)$.
(b) $T$ manda $\underline{O}$ in $\underline{O}$ e manda il punto di coordinate polari $(\rho, \theta)$ nel punto di coordinate polari $(\rho, 2\theta)$.
(c) $T$ manda $\underline{O}$ in $\underline{O}$ e manda il punto di coordinate polari $(\rho, \theta)$ nel punto di coordinate polari $(\rho, 2\pi/3 - \theta)$ (LAG 5to esame 2012-'13).

**12.** Sia $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$, e, per $t$ che varia i $\mathbf{R}$, $\mathbf{w}_t = (2, 1, t)$.
Siano anche $\mathbf{a} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -3, 1)$, e per $s$ che varia in $\mathbf{R}$, $\mathbf{c}_s = (1, s, 0)$. Trocare tutti le coppie $(t, s)$ tali che esiste ed è unica una trasformazione lineare $T_{t,s} : V_3 \to V_3$ tale che $T(\mathbf{u}) = \mathbf{a}$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ e $T(\mathbf{w}_t) = \mathbf{c}_s$. (LAG sessione 6 2013-'14).