Esercizi 3

1. Sia $P = (0, -1, 0)$, $Q = (1, 0, -1)$, $R = (1, -1, 1)$.
(a) Calcolare l'area del triangolo di vertici P , Q e R .
(b) Sia $S = (1, -1, 2)$. Calcolare il volume del parallelepipedo costruito sui vettori $Q - P$, $R - P$ e $S - P$.
(c) Determinare i punti X collineari con P ed S (cioè tali che c'è una retta che contiene X e P e S) tali che il volume del parallelepipedo costruito su $Q - P$, $R - P$ e $X - P$ è uguale a 2.

2. Per t che varia in $\mathbf{R}$ siano $A_t = (t + 2, 1, 1)$, $B_t = (1, t + 2, 1)$, $C_t = (1, 1, t + 2)$.
(a) Determinare l'insieme dei $t \in \mathbf{R}$ tali che $\{A_t, B_t, C_t\}$ è un insieme indipendente. Per tali t calcolare (come funzione di t) il volume del parallelepipedo determinato da A_t , B_t e C_t .

3. Sia $A = (2, -1, 2)$ e $B = (1, 0, -1)$ (n.b.: $A \cdot B = 0$). Descrivere e trovare equazioni per l'insieme di tutti i vettori $X \in V_3$ che sono ortogonali a B e tali che l'angolo tra A e X misura $\pi/4$.

4. Sia $A = (1, -2, 2)$ tali che $B = (1, 2, 0)$.
(a) Trovare un vettore $C \in L(A, B)$ tale che $C \cdot A = 0$ (suggerimento: usare la proiezione ortogonale).
(b) Trovare un vettore $D \in L(A, B)$ tale che l'angolo tra D e A misura $\pi/4$ (suggerimento: prima usare il punto precedente per determinare due versori ortogonali $A', C' \in L(A, B)$. Usando A' e C' , costruire D).
(c) Determinare un vettore D' con la stessa direzione di D tale che il volume del parallelogramma costruito su A e D' è 1.

5. Sia $A = (1, 1, 1)$ e $B = (1, -1, 1)$.
(a) Trovare una base ortonormale di V_3 , $\{C, D, E\}$, tale che C ha la stessa direzione di A e $D \in L(A, B)$ (suggerimento: usare la proiezione ortogonale per costruire D e il prodotto vettoriale per costruire E).

6. Si considerino le seguenti rette di V_2 :

$$L = \{(1, 2) + t(1, 1) \mid t \in \mathbf{R}\} \quad e \quad R = \{(1, 2) + t(1, 3) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

Determinare tutte le rette parallele al vettore $(-2, 1)$ tale che il triangolo formato dai punti di intersezione delle rette L , R e S ha area uguale a 10.

7. Sia $P = (-1, 1, 1)$, $Q = (2, 2, 5)$ e $A = (3, -2, 4)$. Trovare tutti i punti H contenuti nella retta $L = \{P + tA \mid t \in \mathbf{R}\}$ tali che il triangolo di vertici P , Q e H ha area uguale a 30.

8. Considerare le rette di V_3 :

$$L = \{(2, 4, -2) + t(1, 1, 0) \mid t \in \mathbf{R}\} \quad e \quad M = \{(-3, 7, 4) + t(2, -2, 1) \mid t \in \mathbf{R}\}$$

- (a) Mostrare che l'intersezione di L e M è un punto, e determinarlo. Lo si denoti con P . (b) Trovare un punto $Q \in L$ e un punto $R \in M$ tali che $\|Q - P\| = \|R - P\|$ e l'area del triangolo di vertici P, Q, R è uguale a 2.