Esercizi 3

1. Si consideri il piano $M = \{(1,0,-1) + s(1,2,-1) + t(0,3,-1) \mid s,t \in \mathbf{R}\}$. Per a e b che variano in $\mathbf{R}$ si denoti $L_{a,b}$ la retta $\{(1, a+1, 2) + \lambda(b, 1, -2) \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$. Determinare i valori di a e b tali che la retta $L_{a,b}$ è contenuta nel piano M.

2. (a) Siano $P_1 = (-1,1,-1)$, $P_2 = (1,2,2)$, $P_3 = (-3,0,-4)$, $P_4 = (1,1,1)$. C'è un piano che contiene questi quattro punti? In caso affermativo, determinarne l'equazione. In caso negativo spiegare perchè.
(b) Siano $P_1 = (-1,1,-1)$, $P_2 = (1,2,2)$, $Q_3 = (1,1,2)$, $Q_4 = (1,1,1)$. C'è un piano che contiene questi quattro punti? In caso affermativo, determinarne l'equazione. In caso negativo spiegare perchè.

3. Siano $P = (1,0,0)$ e, per a che varia in $\mathbf{R}$, $A_a = (1, a, -1)$. Per a che varia in $\mathbf{R}$ si consideri la seguente retta di V_3 : $S_a = \{P + sA_a \mid s \in \mathbf{R}\}$.
Sia inoltre L quest'altra retta V_3: $L = \{(9,-3,-1) + t(1,0,-1) \mid t \in \mathbf{R}\}$.
Determinare tutti gli $a \in \mathbf{R}$ tali che esiste un piano che contiene sia S_a che L e determinarne l'equazione.

4. Si considerino le seguenti rette in V_2:

$$L = \{(1,2) + t(1,1) \mid t \in \mathbf{R}\} \quad \text{e} \quad R = \{(1,2) + s(1,3) \mid s \in \mathbf{R}\}$$

Deteminare le equazioni cartesiane di tutte le rette parallele al vettore $(-2,1)$ tali che l'area del triangolo i cui vertici sono i punti di intersezione di L, R e S è uguale a 10.

5. Siano $P = (1,2,-1)$ e $Q = (-1,3,5)$.
(a) Determinare il piano M di V_3 tale che il punto di M più vicino a P sia Q.
(b) Determinare l'equazione parametrica della retta che ha le seguenti proprietà: è contenuta nel piano M, contiene il punto Q ed è parallela al piano $\pi : 3x - 2y + z = 0$.

6. Sia M il piano che passa per i punti $(1,1,1)$, $(0,-1,-1)$ e $(1,0,-1)$.
Sia L la retta $\{(1,1,2) + t(1,-2,1) \mid t \in \mathbf{R}\}$.
(a) Determinare l'intersezione $M \cap L$.
(b) Determinare i punti della retta L la cui distanza dal piano M sia uguale a 5.

7. Per ogni $t \in \mathbf{R}$ and per ogni $a \in \mathbf{R}$ si consideri il sistema $\begin{cases} 3x + ty + 2z &= 2 \\ 3tx - ty + z &= \text{a} \\ 6x + ty + z &= \text{t} \end{cases}$.
Determinare tutte le coppie (t, a) tali che il sistema ha:
(i) una soluzione,
(ii) infinite soluzioni,
(iii) nessuna soluzione.

8. Sia $P = (1,1,-1)$, $Q = (1,0,1)$, $R = (2,2,-1)$. (a) Trovare l'equazione cartesiana del piano M che contiene P, Q e R. (b) Trovare le equazioni dei piani M_0 paralleli a M tali che $d(Q, M_0) = 4$.

9. Sia $A = (1,2,-3)$ e $B = (3.-2,4)$. (a) Esiste un vettore $C \in V_3$, non parallelo ad A or B, tale che $\| C \| = 1$ e tale che $\det \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0$? (b) In caso affermativo, mostrare un esempio.

10. Consideriamo il piano $M = \{(1,1,0) + s(1,-1,1) + t(1,0,2) \mid s,t \in \mathbf{R}\}$ e la retta $L = \{(2,0,1) + t(0,1,1) \mid t \in \mathbf{R}\}$. (a) L è contenuta in M? (b) Determinare la retta R contenuta in M, ortogonale a L, e passante per il punto $(2,0,1)$.

11. Sia $P = (1, 1, 2)$, $A = (1, -2, 2)$ and $B = (4, 3, 0)$. Sia L la retta $\{P + tA \mid t \in \mathbf{R}\}$ e sia S la retta $\{P + sB \mid s \in \mathbf{R}\}$.
(a) Determinare una coppia di punti (Q, R) con $Q \in L$ e $R \in S$ tali che: $d(P, Q) = d(P, R)$ e l'area del triangolo di vertici P, Q, R è 30.
(b) Trovare *tutte* le coppie di punti (Q, R) come in (a) (cioè $Q \in L$ e $R \in S$ tali che: $d(P, Q) = d(P, R)$ e l'area del triangolo di vertici P, Q, R è 30).
(c) Esistono piani M che contangono sia la retta L che la retta S e tali che $d(M, P) = 15$?

12. Consideriamo i piani $M = \{(1, 0, 2) + t(1, 2, 1) + s(0, 1, -2) \| s, t \in \mathbf{R}\}$ e
$N = \{(1, 3, 0) + t(1, 1, 1) + s(1, 0, -1) \mid t, s \in \mathbf{R}\}$.
Descrivere il luogo dei punti $P \in V_3$ tali che $d(P, M) = d(P, N)$ e trovarne le equazioni.

13. In V_3 si consideri il piano $M = \{(0, 0, 1) + t(1, 0, 1) + s(1, -1, 0) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$, e la retta $L = L((1, 1, 1))$.
(a) Trovare tutti i punti di L la cui distanza dal piano M sia uguale a $\sqrt{3}$.
(b) Per ogni tale punto P trovare le equazioni (parametrica e cartesiana) dei piani paralleli a M e passanti per P.

14. Sia L l'intersezione dei piani $M_1 : x - y + z = 1$ e $M_2 : y - 2z = -1$. Si denoti inoltre con Π il piano $\{(1, 2, 1) + t(1, -1, -1) + s(-1, 0, 2) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$. Esiste (ed è, eventualmente, unico?) un piano in V_3 che contiene L e perpendicolare a Π?. In caso affermativo determinarlo.

15. Sia $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$. Determinare tutti i versori in $L(u, v)$ che formano con $\mathbf{u}$ un angolo di $\pi/3$.

16. Siano $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$.
(a) Trovare una base ortogonale di V_3, diciamo $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ tale che $L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{w}_1)$ e $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$.
(b) Trovare una base ortogonale di V_3, diciamo $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ tale che $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, e l'angolo tra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{u}_1$ è uguale a $\pi/4$.

17. Sia $L = L(1, 1, 2)$ e sia $\Pi = L(1, 2, 0), (0, 1, 1)$. Trovare le equazioni cartesiane di tutti i piani in V_3 paralleli a L, ortogonali a π, e la cui distanza dal punto $P = (1, 3, 1)$ è uguale a $\sqrt{3}$.

18. Siano $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 1, -1)$. Trovare $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in V_3$ tale che $[\mathbf{avw}] = 4, [\mathbf{uaw}] = -8, [\mathbf{uva}] = 16$.

19. Let $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base ortogonale di V_3 tale che $\| \mathbf{v}_1 \| = 4$, $\| \mathbf{v}_2 \| = \| \mathbf{v}_3 \| = 2$. Sia inoltre $\mathbf{v} = (1/2)\mathbf{v}_1 + (1/2)\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$. Per $i = 1, 2, 3$ siano θ_i gli angoli tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_i$.
(a) Calcolare θ_i per $i = 1, 2, 3$.
(b) Sia $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Scrivere $\mathbf{w}$ come somma di u vettore parallelo a $\mathbf{v}$ e di un vettore perpendicolare a $\mathbf{v}$.