1.4 Esercizi

1. Siano $A = (1, 3, 6)$, $B = (4, -3, 3)$ e $C = (2, 1, 5)$ tre vettori in V_3. Determinare le componenti di ciascuno dei seguenti vettori:

a) $A + B$; b) $A - B$; c) $A + B - C$; d) $7A - 2B - 3C$; e) $2A + B - 3C$.

2. Tracciare i vettori geometrici dall'origine ai punti $A = (2, 1)$ e $B = (1, 3)$. Nella stessa figura tracciare il vettore geometrico dall'origine al punto $C = A + tB$ per ciascuno dei seguenti valori di t:

$t = \frac{1}{3}$; $t = \frac{1}{2}$; $t = \frac{3}{4}$; $t = 1$; $t = 2$; $t = -1$; $t = -2$.

3. Come l'esercizio 2, con $C = tA + B$.

4. Siano $A = (2, 1)$, $B = (1, 3)$ e $C = xA + yB$, dove x e y sono scalari.
a) Disegnare il vettore geometrico dall'origine a C per ciascuna delle seguenti coppie di valori di x e y:
$x = y = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{4}$; $y = \frac{3}{4}$; $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$; $x = 2$, $y = -1$; $x = 3$, $y = -2$; $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$; $x = -1$, $y = 2$.

b) Che cosa pensate che sia l'insieme dei punti C che si ottengono quando x e y percorrono l'insieme di tutti i numeri reali tali che $x + y = 1$? (Cercate solo di trovare una risposta e di tracciare il luogo nella figura; non è richiesta alcuna dimostrazione.)

c) Avanzate una congettura per l'insieme di tutti i punti C che si ottengono quando x e y variano indipendentemente l'uno dall'altro negli intervalli $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e fate uno schizzo di tale insieme.

d) Che cosa pensate che sia l'insieme di tutti i punti C che si ottengono quando x varia nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ e y percorre l'insieme di tutti i numeri reali?

e) Che cosa pensate che sia l'insieme che si ottiene quando x e y percorrono indipendentemente l'uno dall'altro tutto il campo reale?

5. Siano $A = (2, 1)$ e $B = (1, 3)$. Provare che ogni vettore $C = (c_1, c_2)$ di V_2 può essere espresso nella forma $C = xA + yB$. Si esprimano x e y in termini di c_1 e c_2.

6. Siano $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 1)$ e $C = (1, 1, 0)$ tre vettori di V_3 e sia $D = xA + yB + zC$, ove x, y, z sono scalari.
a) Determinare le componenti di D.
b) Dimostrare che se $D = O$, allora $x = y = z = 0$.
c) Determinare x, y, z tali che $D = (1, 2, 3)$.

7. Siano $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 1)$ e $C = (2, 1, 1)$ tre vettori di V_2 e $D = xA + yB + zC$, ove x, y e z sono scalari.
a) Determinare le componenti di D.
b) Determinare x, y e z, non tutti zero tali che $D = O$.
c) Dimostrare che per nessuna scelta di x, y, z può risultare $D = (1, 2, 3)$.

8. Siano $A = (1, 1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1, 1)$, $C = (1, 1, 0, 0)$ tre vettori di V_4 e sia $D = xA + yB + zC$, con x, y, z scalari.
a) Determinare le componenti di D.
b) Dimostrare che se $D = O$ allora $x = y = z = 0$.
c) Determinare x, y, z tali che $D = (1, 5, 3, 4)$.
d) Dimostrare che per nessuna scelta di x, y, z può risultare $D = (1, 2, 3, 4)$.

9. In V_n, dimostrare che due vettori paralleli a uno stesso vettore sono paralleli tra loro.

10. Dati quattro vettori non nulli A, B, C, D in V_n tali che $C = A + B$ e A sia parallelo a D, dimostrare che C è parallelo a D se e solo se B è parallelo a D.

11. a) Dimostrare, per vettori in V_n, le proprietà di addizione e moltiplicazione per scalari date nel teorema 1.1.
b) Disegnando vettori geometrici nel piano, si illustri il significato geometrico delle due leggi distributive $(c + d)A = cA + dA$ e $c(A + B) = cA + cB$.

12. Se un quadrilatero $OABC$ in V_2 è un parallelogrammo avente A e C come vertici opposti, provare che $A + \frac{1}{2}(C - A) = \frac{1}{2}B$. Quale teorema geometrico relativo ai parallelogrammi potete dedurre da questa equazione?

1.8 Esercizi

1. Siano $A = (1, 2, 3, 4)$, $B = (-1, 2, -3, 0)$ e $C = (0, 1, 0, 1)$ tre vettori di V_4. Calcolare ciascuno dei seguenti prodotti scalari:

a) $A \cdot B$; b) $B \cdot C$; c) $A \cdot C$; d) $A \cdot (B + C)$; e) $(A - B) \cdot C$.

2. Dati tre vettori $A = (2, 4, -7)$, $B = (2, 6, 3)$ e $C = (3, 4, -5)$. In ciascuna delle seguenti scritture c'è un solo modo di inserire delle parentesi così da ottenere una espressione significativa. Inserire le parentesi ed eseguire le operazioni indicate.

a) $A \cdot BC$; b) $A \cdot B + C$; c) $A + B \cdot C$; d) $AB \cdot C$; $A/B \cdot C$.

3. Stabilire se è vera o falsa la seguente affermazione concernente i vettori di V_n. Se $A \cdot B = A \cdot C$ e $A \neq O$, allora $B = C$.

4. È vera o falsa la seguente affermazione relativa a vettori di V_n? Se $A \cdot B = 0$ per ogni B, allora $A = O$.

5. Se $A = (2, 1, -1)$ e $B = (1, -1, 2)$, determinare un vettore non nullo C di V_3 tale che $A \cdot C = B \cdot C = 0$.

6. Se $A = (1, -2, 3)$ e $B = (3, 1, 2)$, determinare degli scalari x e y in modo che il vettore $C = xA + yB$ sia non nullo e risulti $C \cdot B = 0$.

7. Se $A = (2, -1, 2)$ e $B = (1, 2, -2)$, si determinino due vettori C e D di V_3 tali che siano soddisfatte le condizioni seguenti: $A = C + D$, $B \cdot D = 0$, C parallelo a B.

8. Se $A = (1, 2, 3, 4, 5)$ e $B = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5})$, determinare due vettori C e D in V_5 tali che siano soddisfatte le condizioni seguenti: $B = C + 2D$, $D \cdot A = 0$, C parallelo ad A.

9. Siano $A = (2, -1, 5)$, $B = (-1, -2, 3)$ e $C = (1, -1, 1)$ tre vettori di V_3. Calcolare la norma di ciascuno dei seguenti vettori:

a) $A + B$; b) $A - B$; c) $A + B - C$; d) $A - B + C$.

10. In ciascun caso, determinare un vettore B di V_2 tale che $B \cdot A = 0$ e $\|B\| = \|A\|$ se

a) $A = (1, 1)$; b) $A = (1, -1)$; c) $A = (2, -3)$; d) $A = (a, b)$.

11. Siano $A = (1, -2, 3)$ e $B = (3, 1, 2)$ due vettori di V_3. In ciascun caso, determinare un vettore C di lunghezza 1 che sia parallelo al vettore:

a) $A + B$; b) $A - B$; c) $A + 2B$; d) $A - 2B$; e) $2A - B$.

12. Siano $A = (4, 1, -3)$, $B = (1, 2, 2)$, $C = (1, 2, -2)$, $D = (2, 1, 2)$ ed $E = (2, -2, -1)$ vettori di V_3. Determinare tutte le coppie ortogonali.

13. Determinare tutti i vettori di V_2 che sono ortogonali ad A e hanno la stessa lunghezza di A se

a) $A = (1, 2)$; b) $A = (1, -2)$; c) $A = (2, -1)$; d) $A = (-2, 1)$.

14. Se $A = (2, -1, 1)$ e $B = (3, -4, -4)$, determinare un punto C nel 3-spazio in modo tale che A, B e C siano i vertici di un triangolo rettangolo.

15. Se $A = (1, -1, 2)$ e $B = (2, 1, -1)$, determinare in V_3 un vettore non nullo C che sia ortogonale sia ad A che a B.

16. Siano $A = (1, 2)$ e $B = (3, 4)$ due vettori in V_2. Determinare in V_2 dei vettori P e Q tali che $A = P + Q$, P sia parallelo a B e Q sia ortogonale a B.

17. Come l'esercizio 16 nel caso in cui i vettori siano in V_4 e si abbia $A = (1, 2, 3, 4)$ e $B = (1, 1, 1, 1)$.

18. Siano dati i tre vettori $A = (2, -1, 1)$, $B = (1, 2, -1)$ e $C = (1, 1, -2)$ di V_3. Determinare ogni vettore D della forma $xB + yC$ che sia ortogonale ad A e abbia lunghezza 1.

19. Si dimostri che per ogni coppia di vettori A e B di V_n risulta:

$$\|A + B\|^2 - \|A - B\|^2 = 4A \cdot B,$$

e quindi $A \cdot B = 0$ se e solo se $\|A + B\| = \|A - B\|$. Quando si interpreta geometricamente questo fatto in V_2, si vede che esso afferma che le diagonali di un parallelogrammo hanno la stessa lunghezza se e solo se il parallelogrammo è un rettangolo.

20. Si dimostri che per ogni coppia di vettori A e B di V_n risulta

$$\|A + B\|^2 + \|A - B\|^2 = 2\|A\|^2 + 2\|B\|^2.$$

Quale teorema geometrico relativo ai lati e alle diagonali di un parallelogrammo si può dedurre da questa identità?

21. Il seguente teorema geometrico suggerisce una identità nella quale intervengono tre vettori A, B e C. Scrivere tale identità e dimostrare che essa è vera per vettori di V_n. Ciò fornirà una dimostrazione del teorema con metodo vettoriale.

La somma dei quadrati dei lati di un quadrilatero supera la somma dei quadrati delle diagonali di quattro volte il quadrato del segmento che congiunge i punti medi delle diagonali.

22. Un vettore A di V_n ha lunghezza 6. Un vettore B di V_n ha la proprietà che per ogni coppia di scalari x e y i vettori $xA + yB$ e $4yA - 9xB$ sono ortogonali. Si calcoli la lunghezza di B e la lunghezza di $2A + 3B$.

23. Siano dati in V_5 i due vettori $A = (1, 2, 3, 4, 5)$ e $B = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5})$. Determinare due vettori C e D che verifichino le seguenti tre condizioni: C è parallelo ad A, D è ortogonale ad A e $B = C + D$.

24. Dati in V_n due vettori A e B non perpendicolari, dimostrare che esistono in V_n dei vettori C e D verificanti le tre condizioni dell'esercizio 23, ed esprimere C e D in termini di A e B.

25. Per ciascuna delle seguenti proposizioni concernenti vettori di V_n si stabilisca se essa è vera oppure falsa:

a) Se A è ortogonale a B, allora $\|A + xB\| \geq \|A\|$ per ogni numero reale x.
b) Se $\|A + xB\| \geq \|A\|$ per ogni numero reale x, allora A è ortogonale a B.

1.11 Esercizi

1. Determinare la proiezione di A lungo B se $A = (1, 2, 3)$ e $B = (1, 2, 2)$.

2. Determinare la proiezione di A lungo B se $A = (4, 3, 2, 1)$ e $B = (1, 1, 1, 1)$.

3. a) Sia $A = (6, 3, -2)$ e a, b, c denotino gli angoli che A forma con i versori degli assi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ rispettivamente. Calcolare $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, cioè i coseni direttori di A.

b) Determinare tutti i vettori di V_3 che hanno lunghezza 1 e sono paralleli ad A.

4. Dimostrare che l'angolo formato dai due vettori $A = (1, 2, 1)$ e $B = (2, 1, -1)$ è doppio di quello formato dai due vettori $C = (1, 4, 1)$ e $D = (2, 5, 5)$.

5. Con metodi vettoriali si determinino gli angoli del triangolo (del 3-spazio) che ha come vertici i punti $(2, -1, 1)$, $(1, -3, -5)$ e $(3, -4, -4)$.

6. Tre vettori A, B, C di V_3 verificano le seguenti proprietà:

$$\|A\| = \|C\| = 5, \qquad \|B\| = 1, \qquad \|A - B + C\| = \|A + B + C\|.$$

Si calcoli l'angolo tra B e C sapendo che l'angolo tra A e B è $\pi/8$.

7. Siano dati in V_n tre vettori non nulli A, B, C. Supposto che l'angolo tra A e C sia uguale all'angolo tra B e C, si dimostri che C è ortogonale al vettore $\|B\|A - \|A\|B$.

8. Se θ è l'angolo tra i seguenti due vettori di V_n: $A = (1, 1, \ldots, 1)$ e $B = (1, 2, \ldots, n)$, si calcoli il limite di θ per $n \to \infty$.

9. Come l'esercizio 8 se $A = (2, 4, 6, \ldots, 2n)$ e $B = (1, 3, 5, \ldots, 2n-1)$.

10. Si considerino in V_2 i vettori $A = (\cos\theta, -\sin\theta)$ e $B = (\sin\theta, \cos\theta)$.

a) Dimostrare che A e B sono vettori ortogonali di lunghezza 1. Fare uno schizzo che mostri A e B quando $\theta = \pi/6$.

b) Determinare tutti i vettori (x, y) di V_2 tali che $(x, y) = xA + yB$. Si stia ben attenti a considerare tutti i valori possibili di θ.

11. Si dimostri con metodo vettoriale che le diagonali di un rombo sono perpendicolari.

12. Formando il prodotto scalare dei due vettori $(\cos a, \sin a)$ e $(\cos b, \sin b)$ si deduca l'identità trigonometrica $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

13. Se θ è l'angolo tra due vettori non nulli A e B in V_n, si dimostri che

$$\|A - B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\|A\|\|B\| \cos\theta.$$

14. Si supponga che invece di definire il prodotto scalare di due vettori $A = (a_1, \ldots, a_n)$ e $B = (b_1, \ldots, b_n)$ mediante la formula $A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$, si usi la definizione seguente:

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|.$$

Quali delle proprietà del teorema 1.2 sono valide con questa definizione? La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è valida con questa definizione?

15. Si supponga di aver definito il prodotto scalare di due vettori $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ mediante la formula

$$A \cdot B = 2a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1.$$

Si dimostri che con questa definizione continuano a valere tutte le proprietà del teorema 1.2 del prodotto scalare. È ancora valida la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz?

16. Come l'esercizio 15 se il prodotto scalare di due vettori $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ di V_3 è definito mediante la formula

$$A \cdot B = 2a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 b_3 + a_3 b_1.$$

17. Si supponga che invece di definire la norma di un vettore $A = (a_1, \dots, a_n)$ mediante la formula $(A \cdot A)^{1/2}$, si usi la definizione seguente:

$$\|A\| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| .$$

a) Dimostrare che questa definizione di norma soddisfa tutte le proprietà dei teoremi 1.4 e 1.5.

b) Usare questa definizione in V_2 e descrivere con una figura l'insieme di tutti i punti (x, y) di norma 1.

c) Quali tra le proprietà dei teoremi 1.4 e 1.5 continuano a valere se si usa la definizione

$$\|A\| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| .$$

18. Si supponga che la norma di un vettore $A = (a_1, \dots, a_n)$ sia definita mediante la formula

$$\|A\| = \max_{1 \le k \le n} |a_k| ,$$

dove il simbolo che compare nel secondo membro significa il massimo degli n numeri $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$.

a) Quali delle proprietà dei teoremi 1.4 e 1.5 sono vere con questa definizione?

b) Con questa definizione di norma in V_2 si descriva con una figura l'insieme di tutti i punti (x, y) di norma 1.

19. Se $A = (a_1, \dots, a_n)$ è un vettore in V_n, si definiscano due norme come segue:

$$\|A\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \qquad \text{e} \qquad \|A\|_2 = \max_{1 \le k \le n} |a_k| .$$

Provare che $\|A\|_2 \le \|A\| \le \|A\|_1$. Si interpretino geometricamente queste disuguaglianze nel piano.

20. Siano A e B due punti dello n-spazio. La loro distanza si indica con $d(A, B)$ e si definisce mediante l'equazione: $d(A, B) = \|A - B\|$. Si dimostrino le seguenti proprietà della distanza:

a) $d(A, B) = d(B, A)$.

b) $d(A, B) = 0$ se e solo se $A = B$.

c) $d(A, B) \le d(A, C) + d(C, B)$.

Capitolo 1

1.4 (p. 21)

1. a) $(5, 0, 9)$ b) $(-3, 6, 3)$ c) $(3, -1, 4)$ d) $(-7, 24, 21)$ e) $(0, 0, 0)$

5. $x = \frac{1}{5}(3c_1 - c_2)$; $y = \frac{1}{5}(2c_2 - c_1)$

6. a) $(x + z, x + y + z, x + y)$ c) $x = 2$; $y = 1$; $z = -1$

7. a) $(x + 2z, x + y + z, x + y + z)$ b) Un esempio: $x = -2$; $y = z = 1$

8. a) $(x + z, x + y + z, x + y, y)$ c) $x = -1$; $y = 4$; $z = 2$

12. Le diagonali di un parallelogrammo si tagliano vicendevolmente a metà

1.8 (p. 28)

1. a) -6 b) 2 c) 6 d) 0 e) 4

2. a) $(A \cdot B)C = (21, 28, -35)$ b) $A \cdot (B + C) = 64$ c) $(A + B) \cdot C = 72$

   d) $A(B \cdot C) = (30, 60, -105)$ e) $A/(B \cdot C) = \left(\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{-7}{15}\right)$

5. Un esempio: $(1, -5, -3)$

6. Un esempio: $x = -2$; $y = 1$

7. $C = \frac{4}{9}(-1, -2, 2)$; $D = \frac{1}{9}(22, -1, 10)$

8. $C = \frac{1}{11}(1, 2, 3, 4, 5)$; $D = \left(\frac{5}{11}, \frac{7}{44}, \frac{1}{33}, \frac{-5}{88}, \frac{-7}{55}\right)$

9. a) $\sqrt{74}$ b) $\sqrt{14}$ c) $\sqrt{53}$ d) 5

10. a) $(1, -1)$ o $(-1, 1)$ b) $(1, 1)$ o $(-1, -1)$ c) $(3, 2)$ o $(-3, -2)$
    d) $(b, -a)$ o $(-b, a)$

11. a) $\frac{1}{\sqrt{42}}(4, -1, 5)$ b) $\frac{1}{\sqrt{14}}(-2, -3, 1)$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$

    d) $\frac{1}{\sqrt{42}}(-5, -4, -1)$ e) $\frac{1}{\sqrt{42}}(-1, -5, 4)$

12. A e B; C e D; C ed E; D ed E

13. a) $(2, -1)$ e $(-2, 1)$ b) $(2, 1)$ e $(-2, -1)$ c) $(1, 2)$ e $(-1, -2)$
    d) $(1, 2)$ e $(-1, -2)$

14. Un esempio: $C = (8, 1, 1)$

15. Un esempio: $C = (1, -5, -3)$

16. $P = \frac{11}{25}(3, 4)$; $Q = \frac{2}{25}(-4, 3)$

17. $P = \frac{5}{2}(1, 1, 1, 1)$; $Q = \frac{1}{2}(-3, -1, 1, 3)$

18. $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$

20. La somma dei quadrati dei lati di qualsiasi parallelogrammo è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali

22. 4; $12\sqrt{2}$

23. $C = \frac{1}{11}(1, 2, 3, 4, 5)$; $D = \frac{1}{11}\left(10, \frac{7}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-5}{4}, \frac{-14}{5}\right)$

24. $C = tA$, $D = B - tA$, dove $t = (A \cdot B)/(A \cdot A)$

1.11 (p. 33)