

1. Determinare un base ortonormale di autovettori per le seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. (a) Determinare tutte le matrici simmetriche di ordine due A tali che $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\det A = -8$.

(b) Determinare tutte le matrici simmetriche di ordine due A tali che $\text{tr}(A) = 6$, $\det(A) = 8$ e tali che $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono autovettori di A (attenzione: ci sono due soluzioni)

(c) Determinare tutte le matrici simmetriche di ordine due A tali che $\text{tr}(A) = 6$, $\det(A) = 8$ e tali che $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono autovettori di A (risultato: nessuna matrice con quelle proprietà)

(d) Determinare tutte le matrici simmetriche di ordine tre A tali che $\text{tr}(A) = 6$ e tali che 2 è un autovalore di A con autospazio $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ (una soluzione).