GEOMETRIA canale G - O Esame scritto 9-2-2016

1. Si consideri la retta L di equazione parametica vettoriale $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il piano M di equazione parametrica vettoriale $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) L è contenuta in M?

(b) Determinare la retta R contenuta in M, perpendicolare a L e passante per il punto $(2, 0, 1)$.

Soluzione (a) La risposta è si: l'equazione cartesiana del piano è det $\begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$, cioè, sviluppando dalla prima riga e semplificando: $2x + y - z = 3$. Si vede subito che tutti i punti di L soddisfano questa equazione (è sufficiente verificarlo per due punti, per esempio $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$).

(b) In questo caso è troppo facile: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (uno dei due generatori del piano passante per l'origine e parallelo a M) è perpendicolare a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vettore direzione della retta L). Dunque la retta $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è contenuta in M (perchè sappiamo che $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e lo è), è perpendicolare a L e passa per $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

NOTA: in generale, anche se non fossimo stati in un caso così fortunato, la retta in questione si sarebbe potuta trovare senza problemi: detto $M = P + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$, è sufficiente fare la proiezione di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su uno dei due generatori ($\mathbf{u}$ o $\mathbf{v}$) del piano passante per l'origine e parallelo a M, e poi sottrarre questa proiezione da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si trova dunque un vettore $\mathbf{w}$ che è perpendicolare a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (per definizione di proiezione) ed è contenuto in $Span(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

(perchè sappiamo che $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lo è). Quindi $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\mathbf{w}$ è la retta cercata.

2. Si consideri, al variare di $t \in \mathbf{R}$, l'applicazione lineare $L_t : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita come segue: $L_t(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+ty+2z \\ 6x+7y+tz \end{pmatrix}$. Inoltre si denoti, al variare di $a \in \mathbf{R}$, $\mathbf{v}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$.
(a) Stabilire per quali coppie (t, a) il vettore $\mathbf{v}_a$ appartiene all'immagine di L_t.
(b) Stabilire per quali coppie (t, a) l'insieme $\{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3 \mid L_t(\mathbf{u}) = \mathbf{v}_a\}$ è infinito e calcolarlo esplicitamente.

Soluzione. (a) Se L_t è invertibile, allora qualsiasi vettore di $\mathbf{R}^3$ sta nell'immagine di L_t. Dunque la prima cosa da fare è vedere quando L_t è invertibile. Questo avviene se e solo se $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & 2 \\ 6 & 7 & t \end{pmatrix} \neq 0$. Calcolando il determinante, viene $t \neq 2, 6$. In questo caso il corrispondente sistema non-omogeneo ha soluzione unica per qualsiasi valore di a. I casi $t = 2$ e$t = 6$ vanno esaminati separatamente.

Per $t = 2$ bisogna vedere quando il sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$ ha soluzione. Si vede immediatamente che questo avviene se e solo se $a = 2$.

Per $t = 6$ bisogna vedere quando il sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$ ha soluzione. Si vede immediatamente che questo avviene se e solo se $a = -26$.

In conclusione: $\mathbf{v}_a$ sta nell'immagine di L_t per tutte le coppie (t, a) con $t \neq 2, 6$, a qualsiasi, e inoltre per le coppie $(2, 2)$ e $(6, -26)$.
(b) Dal punto precedente risulta che l'insieme in questione è infinito se e solo se $(t, a) = (2, 2)$ o $(t, a) = (6, -26)$. Nel primo caso il sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ha come insieme delle soluzioni $\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + Span(\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Nel secondo caso: il sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -26 \\ -1 \end{pmatrix}$ ha come insieme delle soluzioni $\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + Span(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

3. Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:
$T(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $T(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $T(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

(a) Stabilire se T è iniettiva, nel modo seguente: se lo è, spiegare bene perchè. Se non lo è, trovare esplicitamente due vettori diversi di $\mathbf{R}^3$ che hanno stessa immagine tramite T.
(b) Stabilire se T è suriettiva, nel modo seguente: se lo è, spiegare bene perchè. Se non lo è, trovare esplicitamente un vettore di $\mathbf{R}^3$ che non sta nell'immagine di T (spiegando perchè).
(c) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Esistono dei vettori di $\mathbf{R}^3$ $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ tali che $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$? In caso negativo spiegare bene perchè. In caso affermativo determinarli tutti.

Soluzione. Si ha che $Im(T) = Span(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})$. Si vede subito che questi tre vettori non sono indipendenti (ad esempio: il terzo è la differenza dei primi due). Dunque $\dim(Im(T)$ cioè il rango di T, è uguale a 2. Quindi T non è suriettiva e, per il teorema delle dimensioni, non è nemmeno iniettiva. Per rispondere completamente alla domanda (b) è sufficiente trovare un vettore che non sta in $Im(T)$. Poichè $Im(T)$ ha equazione cartesiana $x - z = 0$, si può prendere qualsiasi vettore che non verifica questa equazione, ad esempio $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Per rispondere alla domanda (a) si deve trovare il nucleo di T. Dal teorema delle dimensioni sappiamo che ha dimensione uno. Poichè $T(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) - T(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}) = T(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix})$, si ha che

$$O = T(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) - T(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}) - T(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) = T(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) = T(\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix})$$

Dunque $\ker(T) = Span(\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix})$ e due vettori con la stessa immagine sono, ad esempio O e $\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix})$ (hanno entrambi immagine nulla).
(c) La risposta è si: sono esattamente i vettori dell'insieme $\mathbf{u} + Ker(T)$ cioè i vettori

della forma $\mathbf{u} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ricordiamo perchè: si ha che $T(\mathbf{u} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = T(\mathbf{u}) + \lambda T(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = T(\mathbf{u}) + O$.

4. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ 2x + 3y + 4z \\ -x - y - 2z \end{pmatrix}$
Determinare tutti i vettori non nulli $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ tali che $T(\mathbf{v}) \in Span(\mathbf{v})$.

Soluzione. La condizione $T(\mathbf{v}) \in Span(\mathbf{v})$ significa che esiste un $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, cioè che $\mathbf{v}$ è un autovettore di T. Quindi si tratta di trovare gli autovettori di T. Calcolando il polinomio caratteristico si vede che gli autovalori sono $1, -1, 3$. Gli autovettori sono i vettori non nulli dei corrispondenti autospazi, che risultano essere, rispettivamente, $Span(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $Span(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ e $Span(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix})$.