Geometria 2014 - '15; Esame scritto del 9 settembre 2015

1. Siano $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si considerino le rette L e R di equazioni parametriche vettoriali $L: \quad P + t\mathbf{v}$ e $R: \quad P + s\mathbf{w}$ $(t, s \in \mathbf{R})$.
(a) Determinare una coppia di punti (A, B), con $A \in L$ e $B \in R$ tali che la distanza di A da P è uguale alla distanza di B da P, e il triangolo di vertici P, A, B ha area uguale a 1.
(b) Determinare quante sono le coppie di punti (A, B) come in (a) (cioè $A \in L$ e $B \in R$ tali che la distanza di A da P è uguale alla distanza di B da P, e il triangolo di vertici P, A, B ha area uguale a 1).
(c) Determinare tutti piani M paralleli sia a L che a R e tali che la distanza di P da M sia uguale a 2.

(a) Se $A = P + tA$, si ha che $d(A, P) = \parallel t\mathbf{v} \parallel = |t| \parallel \mathbf{v} \parallel = |t|\sqrt{2}$. Per lo stesso motivo $d(B, P) = |s|\sqrt{3}$. Dunque la condizione $d(A, P) = d(B, P)$ significa $|s| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|t|$. Prendendo, per esempio $t > 0$ e $s > 0$, viene

$$s = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t$$

L'area a del triangolo è $\frac{1}{2} \parallel t\mathbf{v} \times s\mathbf{w} \parallel = \frac{1}{2}|t||s| \parallel bfv \times \mathbf{w} \parallel = \frac{1}{2}|t||s|\sqrt{2}$. Sostituendo l'espressione di s ottenuta precedentemente, viene $a = t^2 \frac{1}{\sqrt{3}}$. Imponendo $a = 1$ viene $|t| = 3^{1/4}$. Avendo preso t positivo, risulta $t = 3^{1/4}$ e, di conseguenza $s = \frac{2^{1/2}}{3^{1/2}}$. In conclusione, troviamo $(A, B) = (P + 3^{1/4}\mathbf{v}, P + \frac{2^{1/2}}{3^{1/2}}\mathbf{w})$.
(b) Quattro coppie (t e s entrambi positivi, entrambi negativi, uno positivo e l'altro negativo).
(c) I piani M paralleli sia a L che R hanno equazione parametrica $x - y = d$, con $d \in \mathbf{R}$. La distanza è $d(M, P) = \frac{|d|}{\sqrt{2}}$. Imponendo che sia uguale a 2 risulta $d = 2\sqrt{2}$ oppure $d = -2\sqrt{2}$. In conclusione, i piani sono due, di equazioni cartesiane rispettivamente $x - y = 2\sqrt{2}$ e $x - y = -2\sqrt{2}$.

2. Sia $V = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ e sia $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x - 2z + t & =0 \\ y - 3z & =0 \end{cases} \}$.
Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$ i cui elementi sono tutti i vettori della forma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, con $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{w} \in W$.
(a) Determinare un base di U.
(b) Stabilire (spiegando bene perchè) se, per ogni $\mathbf{u} \in U$, i vettori $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{w} \in W$ tali che $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ sono unici.

(a) Risolvendo il sistema che definisce W, risulta che $\{\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}$ è una base di W.

Osserviamo inoltre, che, PER DEFINIZIONE, $U = V + W$. Dunque

$$U = Span(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}).$$

Facendo l'eliminanzione di gauss, si vede che non sono indipendenti e che una base è data, per esempio, dai primi tre vettori.

(b) La risposta è no. Infatti, per la formula di Grassmann, $V \cap W$ ha dimensione positiva (più precisamente: ha dimensione uguale a 1). Dunque, per ogni $\mathbf{u} \in U = V + W$, se $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{w} \in W$ sono tali che $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, allora $\mathbf{u}$ si può scrivere anche $\mathbf{u} = (\mathbf{v} + \mathbf{a}) + (\mathbf{w} - \mathbf{a})$, con $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in V \cap W$ (e dunque anche $\mathbf{v} + \mathbf{a} \in V$ e $\mathbf{w} - \mathbf{a} \in W$).

3. Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $T(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-x+5y-2z\\-x-y+z\\5x-y-2z\end{pmatrix}$.

(a) Stabilire se T è iniettiva o no. In caso affermativo spiegare bene perchè. In caso negativo mostrare un esempio di due vettori (diversi) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ tali che $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$.

(b) Stabilire se T è suriettiva. In caso affermativo spiegare bene perchè. In caso negativo mostrare un esempio di un vettore $\mathbf{w}$ che non appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

(a) Si vede subito che $\ker T = Span(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix})$. Dunque T non è inietttiva. Ad esempio $T(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}) = T(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix})$ (più generalmente, se $\mathbf{a} \in \ker T$, si ha che, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$, $T(\mathbf{v} + \mathbf{a}) = T(\mathbf{v})$).

(b) Essendo $rg(T) = 2$, T non è suriettiva. Poichè $Im(T) = Span(\begin{pmatrix}-1\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix})$, cha ha equazione cartesiana $x + 4y + z = 0$, ogni vettore $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ che non soddisfa questa equazione non appartiene a $Im(T)$. Per esempio $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

4. Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y-z=0\}$. Sia $T : V \to V$ l'applicazione lineare definita da $T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y \\ 2x+z \end{pmatrix})$ (si noti che se $\mathbf{v} \in V$ allora effettivamente $T(\mathbf{v}) \in V$).
(a) Determinare polinomio caratteristico e autovalori di T (Attenzione: la T di questo esercizio va da V a V e NON da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$).
(a) Per calcolare polinomio caratteristico e, di conseguenza, autovettori di T, è sufficiente trovare la matrice rappresentativa di T rispetto ad una base qualsiasi di V e farne il polinomio carattestico (sappiamo che per qualsiasi scelta della base si trova sempre lo stesso polinomio caratteristico).

Una base di V è, per esempio, $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$. Si ha che

$$T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e che

$$T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - \lambda - 4$ e gia autovalori sono $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

ATTENZIONE: come sottolineato nel testo, T va da V a V, e V ha dimensione *due*. Dunque il polinomio caratteristico non puó assolutamente essere di grado tre, e gli autolavaggi sono al massimo due e non possono assolutamente essere tre.