Geometria 2015, esame scritto del 30 giugno 2015

1. Si considerino le rette: L: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $t\in\mathbf{R}$ e M: $\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $s\in\mathbf{R}$.
(a) Calcolare $P = L\cap M$. (b) Determinare tutti i punti $Q\in M$ tali che l'area del triangolo di vertici P, $(1,1,1)$ e Q è uguale a 10.

Soluzione. (a) Risolvendo il sistema $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $t\in\mathbf{R} = \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ si trova $P=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$.

(b) Si denoti $A=(1,1,1)$. L'area del triangolo in questione è $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\parallel (A-P)\times(Q-P)\parallel$.
Poichè P sta sulla retta M, abbiamo che $Q-P=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ per $\lambda\in\mathbf{R}$. Dunque $Q-P=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ e

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\parallel\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}\times\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\parallel=\frac{1}{2}|\lambda|\parallel\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}\parallel=|\lambda|\frac{\sqrt{42}}{2}.$$

Imponendo $\mathcal{A}=10$ risulta $|\lambda|=\frac{20}{\sqrt{42}}$ e dunque ci sono due soluzioni

$$Q_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+\frac{20}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\qquad\text{e}\qquad Q_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}-\frac{20}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Attenzione: l'area di un triangolo in $\mathbf{R}^3$ NON è il modulo del determinante della matrice le cui colonne (o righe) sono i vertici del triangolo (magari diviso per 2). Quello è il volume del parallelepipedo costruito sulle colonne della matrice.

2. Si considerino, al variare di $t\in\mathbf{R}$, le matrici

$$A_t=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&t+2&0&0\\t+1&2&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\quad\text{e}\quad B_t=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-1&t+2&2\\0&t+2&0&0\\0&0&0&-(t+2)\end{pmatrix}$$

(a) Calcolare, al variare di $t \in \mathbf{R}$, $rg(A_tB_t)$.

(b) Si consideri, al variare di $a \in \mathbf{R}$, il vettore $C_a = \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}$. Stabilire per quali coppie (t,a) il sistema lineare $(A_tB_t)X = C_a$ ha unica soluzione, infinite soluzioni, nessuna soluzione.

Soluzione. (a) La risposta è: $rg(AtB_t) = 4$ se $t \neq -2$ e $Rg(A_{-2}B_{-2}) = 2$.
Infatti si ha che $\det A_t = 2(t+2)$, come risulta immediatamente sviluppando dall'ultima riga. Si ha che $\det B_t = -(t+2)^3$, come risulta immediatamente sviluppando (per esempio) dalla terza colonna. Dunque, poichè per il teorema sul determinante di un prodotto, $\det(A_tB_t) = (\det A_t)(\det B_t)$, si ha che $\det(A_tB_t) = 0$ se e solo se $t = -2$. Poiche' il determinante e' diverso da zero se e solo se il rango è massimo, cioè 4 in questo caso, abbiamo che $rg(A_tB_t) = 4$ se e solo se $t \neq -2$.

Per $t = -2$, calcolando la moltiplicazione $A_{-2}B_{-2}$ risulta $A_{-2}B_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha evidentemente rango 2.
(b) Risposta: soluzione unica per ogni (t,a) con $t \neq 2$. Infinite soluzioni per $(t,a) = (-2,-1)$.Nessuna soluzione per ogni (t,a) con $t = 2$ e $a \neq -1$. Infatti:
Se $t \neq 2$ allora la matrice A_tB_t ha rango massimo (equivalentemente: è invertibile) e quindi la soluzione è unica per qualsiasi vettore dei termini costanti (Teorema di Rouchè-Capelli, oppure anche Teorema di Cramer), e quindi per qualunque a . Se $t = 2$ il sistema è $\begin{cases} x_1 & =1 \\ 0 & =\text{a+1} \\ x_1 - 2x_2 + 4x_4 & =\text{a} \\ 0 & =\text{a+1} \end{cases}$ che ha evidentemente soluzione se e solo se $a = -1$. In questo caso le soluzioni sono infinite.

3. Siano $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $T(\mathbf{v}) = -3\mathbf{v}$. Determinare esplicitamente la matrice rappresentativa di T rispetto alla base standard di $\mathbf{R}^2$, sia in partenza che in arrivo.

Soluzione. Risposta: $A := M_{\mathcal{CC}}(T) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Questo esercizio si può risolvere in modi diversi. Con il cambiamento di base: sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Si ha che $B = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Inoltre $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcolando l'inversa risulta che $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(id) = C^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Si ha che

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(T) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id)M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(id) = CBC^{-1}.$$

Questo risulta dal diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2_{\mathcal{B}} & \stackrel{T}{\to} & \mathbf{R}^2_{\mathcal{B}} \\ \uparrow id & & \downarrow id \\ \mathbf{R}^2_{\mathcal{C}} & \stackrel{T}{\to} & \mathbf{R}^2_{\mathcal{C}} \end{array}$$

Calcolando il triplo prodotto si trova la matrice A. (Controprova: si verifica che $A\mathbf{u} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$ e $A\mathbf{v} = -3\mathbf{v}$).
NB: la stessa risposta può essere trovata in altri modi (che però sono praticabili perchè in questo caso cerchiamo una matrice 2×2, quindi "piccola") . Ad esempio, imponendo che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{v} = -3\mathbf{v}$. Viene un sistema di 4 equazioni nelle 4 incognite a, b, c, d che è abbastanza facile. Oppure si può esprimere direttamente $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ (questo equivale a trovare C^{-1}) e poi applicare la definizione di T.

4. Sia $U = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix})$ la retta di $\mathbf{R}^3$ passante per l'origine e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Dato un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$, si denoti $Pr_L(\mathbf{x})$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su L. Si denoti $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $L(\mathbf{x}) = pr_L(\mathbf{x})$.
Determinare autovalori e autospazi di L. Stabilire se T è diagonalizzabile e, in caso affermativo, esibire una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L)$ è diagonale.

Soluzione. Se $\mathbf{u} \in U$, allora $L(\mathbf{u}) = pr_U(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Dunque $\lambda = 1$ è un autovalore di L e U è contenuto nell'autospazio di $\lambda = 1$. Se invece $\mathbf{v}$ è un vettore perpendicolare a U, allora $L(\mathbf{v}) = pr_U(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Dunque $\lambda = 0$ è autovalore di L e il piano dei vettori perpendicolari a U è contenuto nell'autospazio di 0. Ne segue che 0 ha molteplicità geometrica e algebrica uguale a 2, mentre 1 ha molteplicita' algebrica e geometrica uguale a 1.
Il piano perpendicolare a U ha equazione $x - y + 3z = 0$. una sua base è $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
Sia $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$. Risulta dunque che $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L) = diag(0, 0, 1)$. Dunque L è diagonalizzabile.
NB: (1) Questo esempio è stato fatto a lezione nel caso di $\mathbf{R}^2$, ed è del tutto analogo al caso della riflessione di $\mathbf{R}^2$ rispetto ad una retta passante per l'origine, che è stato fatto ugualmente a lezione (due volte, su richiesta di studenti), e che si trova anche nelle dispense. Analoghi esercizi si trovano in esami di anni precedenti.
(2) Se lo studente non arriva alla soluzione di cui sopra, può scrivere la matrice di L, che è $A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ e diagonalizzarla. Senza trovare il polinomio caratteristico, si

vede che il determinante è zero, quindi 0 è un autovalore. Calcolando l'autospazio, che è il ker della matrice, si vede che la molteplicità geometrica è due. Con la traccia si vede che l'altro autovalore è 1 e si trova l'altro autospazio. Oppure, alla peggio, si può calcolare il polinomio caratteristico.