

Geometria 2014 - '15; Esame scritto del 21 settembre 2015.

1. Si considerino le seguenti tre rette in $\mathbf{R}^2$: $L: 2x - y = 1$, $R = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$

e $S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$.

(a) Descrivere e trovare equazioni per l'insieme dei punti P di $\mathbf{R}^2$ tali che $d(P, L) = d(P, R)$;

(b) Descrivere e trovare equazioni per l'insieme dei punti Q di $\mathbf{R}^2$ tali che $d(Q, L) = d(Q, S)$.

(a) Equazione cartesiana di R : $3x + 4y = 13$. Se $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si ha che: $d(P, L) = \frac{|2x - y + 1|}{\sqrt{5}}$

e $d(P, R) = \frac{|3x + 4y - 13|}{5}$. Uguagliando viene $\sqrt{5}|2x - y + 1| = |3x + 4y - 13|$ che e' l'unione di due rette: $\sqrt{5}(2x - y + 1) = 3x + 4y - 13$ e $\sqrt{5}(2x - y + 1) = 3x + 4y - 13$. Sono le due bisettrici degli "spicchi" delimitati da L e R .

(b) L'equazione cartesian di S é: $2x - y = 5$. Dunque $d(P, S) = \frac{|2x - y - 5|}{\sqrt{5}}$. Uguagliando si ha $|2x - y + 1| = |2x - y - 5|$. Dunque $2x - y + 1 = 2x - y - 5$, che non ha soluzione, e $2x - y + 1 = -(2x - y - 5)$, che e' la retta che "sta a metà" tra L e S (che sono parallele). Dunque abbiamo una sola retta in questo caso.

2. Si consideri, al variare di t in $\mathbf{R}$, la matrice $C_t = \begin{pmatrix} t+2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & t+2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & t+2 & 1 \\ 1 & t+3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calcolare $\det(C_t)$ come funzione di t . Trovare i valori di t per cui $\det(C_t) = 0$.

(b) Si consideri il sistema lineare la cui matrice *completa* è C_t . Stabilire per quali valori di t tale sistema ha unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione.

(a)

$$\begin{aligned} \det C_t &= \det \begin{pmatrix} t+2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & t+2 & 2 & 0 \\ -(t+2) & 0 & t+2 & 0 \\ 1 & t+3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2 & t+2 & 2 & 0 \\ -(t+2) & 0 & t+2 & 0 \\ 1 & t+3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -\det \begin{pmatrix} 2 & t+2 & 4 \\ -(t+2) & 0 & 0 \\ 1 & t+3 & 0 \end{pmatrix} = -4(t+2)(t+3) \end{aligned}$$

Dunque i valori sono $t = -2$ e $t = -3$. (NOTA: calcolo del determinante: nel primo passaggio si e' sottratta la prima riga dalla terza. Poi si e' sviluppato dall'ultima colonna. Poi, nel determinante 3×3 , si è sommata la prima colonna alla terza).

(b) Se $\det(C_t) \neq 0$ la matrice C_t ha rango 4 e non potrà mai avere lo stesso rango della matrice incompleta, che è al massimo 3. Quindi ci possono essere soluzioni solo quando $\det(C_t) = 0$, cioè per $t = -2$ e $t = -3$. In questi casi effettivamente si vede subito che la matrice incompleta ha rango 3 (e quindi anche quella completa). Quindi la risposta è $t = -2$ e $t = -3$.

3. Siano $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Sia $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$

l'applicazione lineare tale che $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare $T(3\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w})$;

(b) Calcolare autovalori e autospazi di T .

(c) Calcolare la matrice rappresentativa di T rispetto alla base standard di $\mathbf{R}^3$.

(a) Abbiamo che $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è il vettore delle coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ del

vettore $T(3\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w})$. Poichè $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ abbiamo che

$$T(3\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}) = 2\mathbf{u} + 2\mathbf{v} - 4\mathbf{w}.$$

(b) sappiamo che il polinomio caratteristico non dipende dalla matrice rappresentativa, ma solo dall'applicazione. Dunque possiamo calcolare il polinomio caratteristico, e quindi gli autovalori, della matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$. Si vede facilmente che gli autovalori sono 1, 6 e 2. Autospazi: usiamo la solita procedura, ma ricordiamo che stiamo lavorando con le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Dunque: $V(1) = \text{Span}(-2\mathbf{u} + \mathbf{w})$, $V(6) = \text{Span}(\mathbf{u} + 2\mathbf{w})$,

$V(2) = \text{Span}(\mathbf{v})$. ATTENZIONE: scrivere, ad esempio, che $V(2) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ (e

similmente per gli altri autospazi) e' un errore grave: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è un autovettore di T per

l'autovalore 2. In altre parole: $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Visto che $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, quello che è

vero è che $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Denotiamo $C = M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Abbiamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{\mathcal{E}}^3 & \xrightarrow{T} & \mathbf{R}_{\mathcal{E}}^3 \\ \downarrow id & & \uparrow id \\ \mathbf{R}_{\mathcal{B}}^3 & \xrightarrow{T} & \mathbf{R}_{\mathcal{B}}^3 \end{array}$$

Dunque $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) = C M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) C^{-1}$. Si calcola abbastanza facilmente $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. ■

Dunque

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Stabilire se qualcuno tra i seguenti scalari: $-2, -1$ è un autovalore di A . Per tali scalari, calcolare il corrispondente autospazio (attenzione: non si chiede di calcolare il polinomio caratteristico).

(b) Usando (a), trovare tutti gli autovalori di A . Stabilire se esiste una matrice C tale che $C^{-1}AC$ è una matrice diagonale (non si richiede di calcolare la matrice C , ma spiegare bene la risposta).

(a) Si considera la matrice $A - (-1)I_4$. Si vede abbastanza brevemente che ha determinante non nullo. Quindi -1 non è un autovalore. Poi si considera la matrice $A - (-2)I_4$. Questa

è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, che ha tutte le righe proporzionali, quindi rango uno. Dunque

-2 è un autovalore, e la sua molteplicità geometrica è $4 - 1 = 3$.

(b) Dunque la molteplicità algebrica di -2 è almeno 3, che significa che abbiamo almeno tre autovalori coincidenti, uguali a -2 . ma sappiamo che $(-2) + (-2) + (-2) + \lambda_4 = \text{Tr}(A) = -4$. Quindi il quarto autovalore è $\lambda_4 = 2$. Questo ha necessariamente molteplicità algebrica uno. Dunque abbiamo due autovalori. Per entrambi la molteplicità algebrica è uguale alla geometrica, e quindi A è diagonalizzabile. Questo significa precisamente che esiste una matrice C tale che $C^{-1}AC$ è una matrice diagonale (C è una matrice che ha per colonne una base di autovettori e la matrice $C^{-1}AC$ è la matrice rappresentativa rispetto a tale base dell'applicazione lineare $X \mapsto AX$).