

Geometria 2014 - '15. Esame scritto del 13 luglio 2015

1. Sia L la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ e sia M il piano passante per i punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Determinare tutti i punti della retta L la cui distanza dal piano M è uguale a $\sqrt{2}$.

Soluzione. Risolvendo il sistema risulta l'equazione parametrica L : $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$t \in \mathbf{R}$. L'equazione parametrica del piano M è M : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbf{R}$.

Se ne deduce l'equazione cartesiana $x - z = 1$. Dato un punto $P_t \in L$, dove $P_t = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, se ne deduce che $d(P_t, M) = \frac{|-5t-5|}{\sqrt{2}}$. Imponendo che sia uguale a

$\sqrt{2}$ risulta che $|5 + 5t| = 2$, che ha le due soluzioni $t = -2/5$ e $t = -3/5$. Sostituendo nell'equazione parametrica di t , risultano le due soluzioni P_1 e P_2 .

2. Sia $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la funzione così definita: $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{x}$

(dove $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$ significa prodotto scalare di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$).

Determinare la funzione inversa di T .

Soluzione. Denotando $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ si ha che $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = (x - y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -y + z \\ -x - z \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Dunque T è lineare, più precisamente $T = L_A$,

con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dunque $T^{-1} = L_{A^{-1}}$. Calcolando, si trova che $A^{-1} =$

$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Dunque la funzione inversa è:

$$T^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e sia $V = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Sia inoltre

$T : V \rightarrow V$ l'applicazione lineare così definita:

$$T(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) \mathbf{v}_1 + (\lambda_2 - \lambda_3) \mathbf{v}_2 + (\lambda_1 + 3\lambda_2) \mathbf{v}_3$$

(a) Determinare una base di $\ker T$. Determinare una base di $\text{Im } T$.

(b) Stabilire se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene a $\text{Im } T$.

Soluzione. (a) Innanzitutto $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti, dunque una base di V , e quindi la definizione di T ha senso. Ne segue anche che $T(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$ se

e solo se $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$. Risolvendo il sistema (nelle incognite $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) lo spazio

delle soluzioni è $\text{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ dunque $\ker T = \text{Span}(-3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

Si ha che $\text{Im } T = \text{Span}(T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3))$. Per il teorema delle dimensioni, $\dim \text{Im } T = 3 - 1 = 2$, quindi, per trovare una base di $\text{Im } T$ è sufficiente prendere due vettori non pro-

porzionali tra $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)\}$. Ad esempio $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) calcolando, si verifica che $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \text{Im } T$

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e sia $L_A : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

(a) Determinare autovalori ed autospazi di L_A .

(b) Stabilire se esistono una matrice diagonale D ed una matrice invertibile C tali che $D = C^{-1}AC$. In caso affermativo determinare D e C .

Soluzioni. Un facile calcolo con il polinomio caratteristico mostra che ci sono due autovalori doppi: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 5$. Entrambi gli autospazi risultano di dimensione due: $V_1 =$

$$\text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{e} \quad V_5 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Dunque l'applicazione L_A è diagonalizzabile, e una base $\mathcal{B}$ di autovettori è data mettendo insieme i vettori della base di V_1 e della base di V_5 .

Quindi le matrici C e D richieste dall'esercizio esistono: $C = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(id) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e $D = \text{diag}(1, 1, 5, 5)$.

NOTE: (1) la matrice C è automaticamente invertibile. (2) NON era richiesto di calcolare la matrice C^{-1} .