1. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Determinare esplicitamente un esempio di un rettangolo $ABCD$ (con A e C vertici opposti), contenuto nel piano passante per l'origine, A e C . (Nota: in pratica, bisogna produrre due punti B, D tale che A, B, C e D sono vertici un rettangolo (con A e C vertici opposti) contenuto nel piano passante per l'origine, A e C).

Soluzione. Ci sono infiniti rettangoli con le proprietà richieste. Il modo pi' breve di produrne uno è probabilmente il seguente: si considera una retta L passante per uno dei due punti, per esempio A , e contenuta nel piano (la pi' semplice è $Span(A) = \{tA | t \in \mathbf{R}\}$). Si fa la proiezione di C su questa retta. In questo modo otteniamo un punto B tale che l'angolo tra AB e BC è retto (e il segmento AB è contenuto retta L). A questo punto di prende $D = C + (A - B)$ o $D = C + (B - A)$ a seconda dei casi (D e A devono stare nello stesso semipianorispetto alla retta passante per C e perpendicolare a L).

2. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (nella soluzione deve risultare il metodo usato).

Soluzione. Il determinante è -8 .

3. Siano $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia inoltre $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $T(\mathbf{u}) = 6\mathbf{u} + \mathbf{w}$, $T(\mathbf{v}) = 6\mathbf{v}$ e $T(\mathbf{w}) = -3\mathbf{w}$. Determinare autovalori e autovettori di T (questi ultimi espressi nelle coordinate standard) e trovare, se possibile, una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T .

Soluzione. È chiaro che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono autovettori, di autovalori 6 e -3 , rispettivamente. Calcolando con la matrice rappresentativa di T rispetto alla base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ si vede immediatamente che c'è un altro autovettore di autovalore 6 : $9\mathbf{u} + \mathbf{w}$. Una base di autovettori

c'è. Ad esempio: $\{9\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

4. Si consideri il polinomio $P(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 5)$. Dare esplicitamente un esempio di matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ e tale che il polinomio caratteristico di A è $P(\lambda)$.

Soluzione. Anche qua, ci sono infinite soluzioni. Come controprova: la matrice S deve avere $\text{tr}(A) = -2 + 5 = 3$ e $\det(A) = (-2) \cdot 5 = -10$.

5. Si consideri la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinare, se possibile, una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A di norma 1 e ortogonali a due a due.

Soluzione. La matrice è sicuramente diagonalizzabile, perchè simmetrica. Inoltre, per lo stesso motivo, c'è sicuramente una base di autovettori di norma unitaria e ortogonali a due a due. Gli autovalori sono -1 (doppio) e 8 . Gli autospazi hanno dimensione 2 e 1, rispettivamente. È chiaro che i vettori del primo autospazio sono perpendicolari a quelli del secondo, però visto che il primo autospazio ha dimensione 2, bisogna trovare due vettori ortogonali nel primo autospazio. Poi si normalizza. per esempio, una base come richiesto è $\left\{ (1/\sqrt{5}) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, (1/3\sqrt{5}) \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, (1/3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.