Alcuni esercizi su applicazioni lineari, matrici rappresentative, cambiamento di base

.

Siano $A_1 = (1,2)$ e $A_2 = (1,-3)$. Sia $T : R(2) \to R(2)$ l'applicazione lineare tale che $T(A_1) = -2A_1$ e $T(A_2) = 3A_2$. Sia $B = \{A_1,A_2\}$.
(a) Determinare $M(B,B)(T)$.
(b) Determinare $M(B,C)(T)$, dove C e' la base standard.
(c) Determinare $M(C,C)(T)$.
(d) Usando il punto (c), determinare $T((1, 0))$.
(e) Usando il punto (c), determinare $T((5, -4))$.

2. Siano $A_1 = (1,1,-2)$, $A_2 = (2,1,0)$, $A_3 = (1,0,0)$. Sia $T : R(3) \to R(3)$ l'applicazione lineare tale che $T(A_1) = A_1 - A_2$, $T(A_2) = 3A_2$, $T(A_3) = A_2 + A_3$. Dato $(x, y, z) \in R(3)$, determinare $T((x, y, z))$.

3. Siano $A_1$, $A_2$, $A_3$ come nell'esercizio precedente, e sia $S : R(3) \to R(3)$ l'applicazione lineare tale che $S(A_1) = (1, 2, 1)$, $S(A_2) = (2, -1, 1)$, $S(A_3) = (0, 5, 1)$.
(a) Determinare $IM(S)$ e $\ker(S)$.
(b) Determinare $M(B,B)(S)$ e $M(C,C)(S)$, dove C e' la base standard e B e' la base formata da $A_1$, $A_2$, $A_3$

4. Siano V e W due spazi vettoriali e siano $v \in V$, diverso dal vettore nullo, e $w \in W$. Dimostrare che esistono trasformazioni lineari $T : V \to W$ tali che $T(v) = w$. Ce ne sono un numero finito oppure infinite? Che succede se $v = O$?

5. Siano V e W due spazi vettoriali e siano $v_1$ e $v_2$ due vettori di V, linearmente indipendenti.
(a) Dimostrare che esistono trasformazioni lineari $T : V \to W$ tali che $T(3v_1 + v_2) = v_1 - v_2$ e $T(v_1 - 2v_2) = -4v_1 + 3v_2$.
Inoltre, esprimere $T(v_1 + v_2)$ e $T(v_2)$ in funzione di $v_1$ e $v_2$.

6. Vero/falso? (giustificare)
Data una matrice $A \in M_{5,6}$, $T(X) = AX$ definisce una trasformazione lineare $T : R(5) \to R(6)$. Ogni trasformazione lineare $T : V_6 \to V_4$ `e suriettiva.
Ogni trasformazione lineare $T : V_4 \to V_6$ `e iniettiva.
Ogni trasformazione lineare $T : V_6 \to V_4$ tale che dim per $(T) = 2$ `e suriettiva.
Ogni trasformazione lineare $T : V_4 \to V_6$ tale che dim $(IM(T)) = 4$ `e suriettiva.

Se dim V = dim W una trasformazione lineare $T :\rightarrow W$ `e iniettiva se e solo se `e suriettiva.

13.

SianoV eW spazi vettoriali e siano $v_1,...,v_k \in V$.
Dimostrare che se $T(v_1),...,T(v_k)$ sono linearmente indipendenti allora $v_1,...,v_k$ sono linearmente in- dipendenti.
Dimostrare che se $v_1,...,v_k$ sono linearmente indipendenti e T `e iniettiva, allora $T(v_1),...,T(v_k)$ sono linearmente indipendenti.

Sia W un sottospazio vettoriale (di dimensione positiva) di $V_n$. La riflessione ortogonale rispetto a W, $R_W : V_n \rightarrow V_n$ `e biettiva? (rispondere e dimostrare la risposta).