4. Geometria di $\mathbf{R}^3$.

Questo paragrafo è molto simile al paragrafo 1: tratta infatti delle proprietà geometriche elementari dello spazio $\mathbf{R}^3$. Per assegnare delle *coordinate* nello spazio, fissiamo innanzitutto un punto $\mathbf{0}$, che chiamiamo *l'origine.* Scegliamo poi tre rette perpendicolari che si incontrano in $\mathbf{0}$: due rette "orizzontali" come assi delle x_1 e delle x_2, e la terza "verticale" come asse delle x_3. Fissiamo su di esse un verso ed un'unità di misura. Adesso, ad un arbitrario punto P dello spazio associamo una terna di numeri reali $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, che indicano rispettivamente le proiezioni di P sugli assi delle x_1, x_2 e x_3.

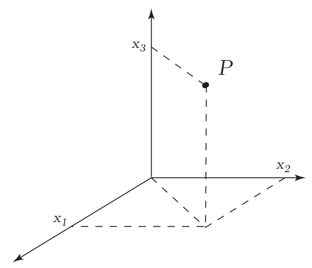

Fig.1. Il punto $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ nello spazio $\mathbf{R}^3$.

Le coordinate x_1, x_2 e x_3 individuano il punto P in modo unico. Si possono identificare quindi i punti P dello spazio con le terne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, i punti sull'asse delle x_1 sono quelli che soddisfano $x_2 = x_3 = 0$, i punti sull'asse delle x_2 quelli che soddisfano $x_1 = x_3 = 0$ e i punti sull'asse delle x_3 quelli che soddisfano $x_1 = x_2 = 0$. L'origine $\mathbf{0}$ è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'insieme delle terne ordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ si chiama "spazio cartesiano" e si indica con $\mathbf{R}^3$:

$$\mathbf{R}^3 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}.$$

Nello spazio $\mathbf{R}^3$, insieme agli assi coordinati, si considerano anche i piani coordinati: sono i tre piani ortogonali che si intersecano nell'origine, ognuno dei quali contiene due dei 3 assi coordinati. Essi sono: il piano (x_1, x_2) i cui punti soddisfano $x_3 = 0$, il piano (x_2, x_3) i cui punti soddisfano $x_1 = 0$ ed il piano (x_1, x_3) i cui punti soddisfano $x_2 = 0$.

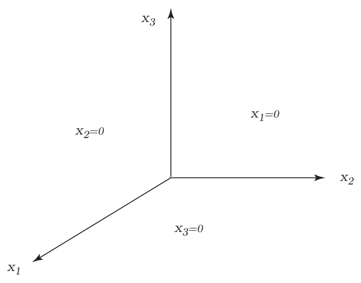

Fig.2. I piani coordinati in $\mathbf{R}^3$

Come nel caso del piano, indicheremo in seguito con $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ anche il *vettore* $\mathbf{x}$ uscente dall'origine e di estremo il punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

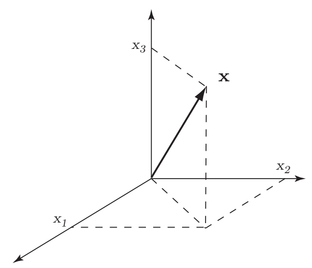

Fig.3. Il vettore $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Il vettore $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di lunghezza zero, si chiama *vettore nullo.* Per semplicità di notazione, scriveremo spesso $\mathbf{x}$ sottointendendo $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; similmente scriveremo $\mathbf{y}$ per $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, etc ...

Definizione. Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due vettori in $\mathbf{R}^3$. Allora la *somma* $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il vettore dato da

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}.$$

Il *vettore opposto* del vettore $\mathbf{x}$ è il vettore

$$-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

La *differenza* $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ dei vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il vettore $\mathbf{x}-\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1-y_1 \\ x_2-y_2 \\ x_3-y_3 \end{pmatrix}$.

Definizione. Sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Il *prodotto* di $\mathbf{x}$ per λ è il vettore dato da

$$\lambda\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}.$$

Come nel piano, anche nello spazio la somma tra vettori ha un'interpretazione geometrica. Osserviamo che due vettori qualunque $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^3$ sono contenuti in un piano π passante per $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Il vettore somma $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ si trova applicando la regola del parallelogramma ai vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sul piano π. Per costruzione, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ è contenuto nel piano π. Resta solo da verificare che le coordinate di $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ così ottenute sono effettivamente

$$\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}.$$

Anche in $\mathbf{R}^3$, il vettore differenza $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ è paralello alla retta passante per $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$; la lunghezza di $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ è uguale alla distanza fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

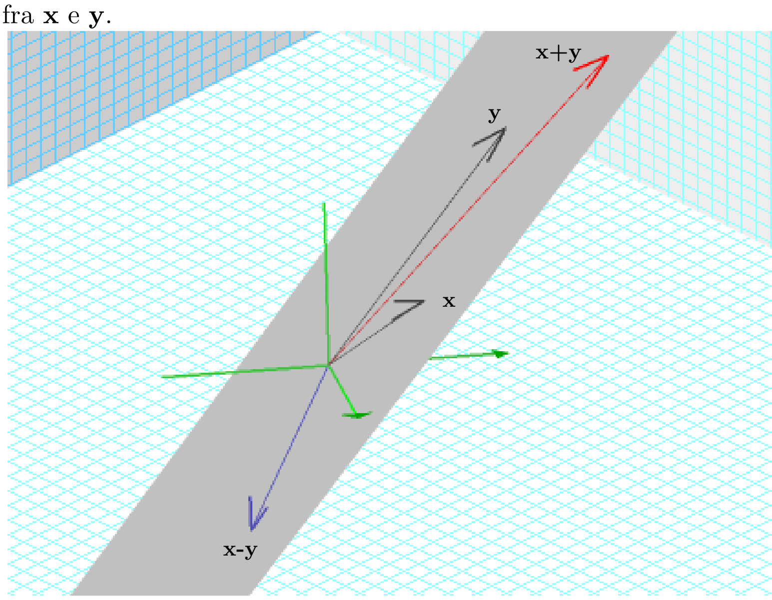

Fig.4. La somma $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, la differenza $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

Osservazione. La costruzione appena discussa è utile perché riconduce la somma di vettori nello spazio ad una somma di vettori sul piano. Ci permette inoltre di definire l'angolo ϑ fra due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dello spazio, come l'angolo da essi formato nel piano π che li contiene. Nel caso in cui $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono uno multiplo dell'altro, il piano π non è unico ed i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ stanno tutti sulla stessa retta. In questo caso, l'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è $\vartheta = 0$.

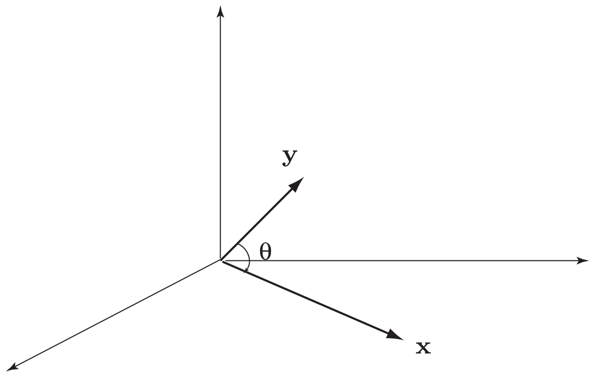

Fig.5 L'angolo ϑ fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

La somma fra vettori gode delle seguenti proprietà:

Proposizione 4.1.
(i) (Proprietà associativa della somma) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z});$$

(ii) (Proprietà commutativa) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x};$$

(iii) (Proprietà associativa del prodotto) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x};$$

(iv) (Proprietà distributiva) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y},$$
$$(\lambda+\mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}.$$

Dimostrazione. Anche in questo caso, le proprietà *(i)*, *(ii)*, *(iii)* e *(iv)* sono semplici conseguenze delle analoghe proprietà dei numeri reali.

Definizione. (*Prodotto scalare.*) Dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^3$ il *prodotto scalare* $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ è il numero reale dato da

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà

Proposizione 4.2.
(i) (Proprietà commutativa) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x};$$

(ii) (Proprietà distributiva) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z};$$

(iii) (Omogeneità) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ *ed ogni* $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{y});$$

(iv) (Positività) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0,$$
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \textit{se e soltanto se} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è molto simile a quella della Prop.1.2 ed è lasciata al lettore.

Definizione. La norma $\|\mathbf{x}\|$ di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ è definita da

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Per il Teorema di Pitagora, la norma del vettore $\mathbf{x}$ è uguale alla lunghezza del segmento congiungente $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Equivalentemente, la norma di $\mathbf{x}$ è la distanza del punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dall'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

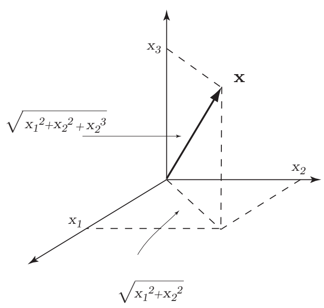

Fig.6. Il Teorema di Pitagora in $\mathbf{R}^3$.

Analogamente, dalla Fig.4 vediamo che $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ è la distanza fra i punti $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Usando la norma, diamo un'interpretazione geometrica del prodotto scalare.

Proposizione 4.3. *Siano* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *due vettori in* $\mathbf{R}^3$.
(i) Allora

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \varphi$$

dove φ *è l'angolo fra i vettori* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$.
(ii) I vettori $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *sono perpendicolari se e soltanto se* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Dimostrazione. Sia π un piano che passa per $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Consideriamo in π il triangolo di vertici i punti $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Dalla Fig.4, vediamo che i lati del triangolo hanno lunghezze $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. Applicando la regola del coseno troviamo
$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi.$$
Dalla definizione stessa della norma abbiamo
$$(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi$$
e quindi
$$-2x_1y_1 - 2x_2y_2 - 2x_3y_3 = -2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi$$
come richiesto. Per la parte *(ii)*, osserviamo che $\cos\varphi = 0$ se e soltanto se $\varphi = \pm\pi/2$, cioè se e soltanto se φ è un angolo retto.

Corollario 4.4. *(Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vettori in $\mathbf{R}^3$. Allora*
$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

Dimostrazione. Questo segue dal fatto che $|\cos\varphi| \le 1$. (Vedi l'Eserc.1.B).

Proposizione 4.5. *Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vettori in $\mathbf{R}^3$. Allora*
(i) (Disugualianza triangolare)
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|;$$
(ii) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$
$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\cdot\|\mathbf{x}\|.$$

Dimostrazione. *(i)* Sia π un piano che passa per $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. In π c'è il triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y}$. Poiché i lati hanno lunghezze $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$, la disuguaglianza triangolare in $\mathbf{R}^3$ segue dalla disuguaglianza triangolare nel piano. Una seconda dimostrazione dello stesso fatto si può ottenere anche usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz del Cor.4.4:
$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + (x_3+y_3)^2\\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)\\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y},\\ &\le \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.\end{aligned}$$
Poiché $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ sono numeri non negativi, possiamo estrarne le radici quadrate ottenendo la disuguaglianza cercata.
(ii) Direttamente dalla definizione della norma troviamo
$$\|\lambda\mathbf{x}\|^2 = (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + (\lambda x_3)^2 = \lambda^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \lambda^2\|\mathbf{x}\|^2.$$
Estraendo le radici quadrate, otteniamo
$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$$
come richiesto.

Come applicazione del prodotto scalare, calcoliamo le proiezioni ortogonali di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ su una retta l o su un piano β, passanti per l'origine.

Proposizione 4.6. *Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due vettori in $\mathbf{R}^3$, con $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Allora $\mathbf{x}$ si decompone in modo unico come*
$$\mathbf{x} = c\mathbf{y} + \mathbf{z} \qquad \text{con } c \in \mathbf{R} \text{ e } \mathbf{z} \text{ perpendicolare a } \mathbf{y}$$
Per lo scalare c vale la seguente formula
$$c = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}$$
Il vettore $c\mathbf{y}$ è detto la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ sulla retta passante per l'origine e parallela al vettore $\mathbf{y}$. Il vettore $\mathbf{z} = \mathbf{x} - c\mathbf{y}$ è detto la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ sul piano passante per l'origine di equazione e perpendicolare a $\mathbf{y}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto simile a quella della Proposizione 1.6 ed è lasciata al lettore.

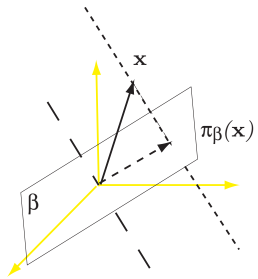

Fig.7. La proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{x}$ sul piano β.

Conseriamo adesso *matrici* 3×3 (a coefficienti reali), cioè tabelle di numeri della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Le righe della matrice sono tre vettori di $\mathbf{R}^3$ (scritti orizzontalmente anzichè verticalmente), denotati A_1, A_2 e A_3. Le colonne di A sono tre vettori di $\mathbf{R}^3$, denotati rispettivamente A^1, A^2 e A^3. Per esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -7 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ad esempio: il coefficiente $a_{12} = 3$, $a_{31} = 2$, $A_3 = (2, 1, -1)$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Definizione. Il determinante di A è il numero reale

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Nell'esempio precedente $\det A = 7 + 6 + 0 - 6 - 1 = 6$.

Definizione. La matrice trasposta di una matrice A è la matrice A^T le cui colonne sono righe di A.
Se A è quella dell'esempio precedente, si ha che

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Una prima proprietà, che segue immediamatamente dalla definizione, è

(i) $$\det A = \det A^T$$

Grazie a ciò, tutte le proprietà del determinante espresse in funzione delle righe sono vere anche in funzione delle colonne, e viceversa.

Definizione. Fissati $i, j = 1, 2, 3$, la sottomatrice complementare di a_{ij} è la matrice 2×2 che si ottiene da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna. Essa si denota A_{ij}.

Nell'esempio precedente si ha, ad esempio, che $A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Un'altra utile proprietà dei determinanti è la seguente

(ii) Sviluppi di Laplace. Si ha che:

$$\text{per ogni fissato } i = 1,2,3 \qquad \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{(sviluppo secondo la } i\text{-esima riga)}$$

$$\text{per ogni fissato } j = 1,2,3 \qquad \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{(sviluppo secondo la } j\text{-esima colonna)}$$

Anche questo segue direttamente dalla definizione. Ad esempio, per $i = 1$, raccogliendo di termini a_{1j} per $j = 1, 2, 3$ (ciascuno di essi sta in due addendi nella formula della definizione di determinante) si ha lo sviluppo secondo la prima riga:

$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11} \det A_{11} - a_{11} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}.$ $\blacksquare$

Ad esempio, sviluppando dalla seconda riga il determinante della matrice A dell'esempio si calcola:

$$\det A = 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 7 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -6 + 7 + 5 = 6$$

Sviluppando invece dalla terza colonna abbiamo

$$\det A = 0 \det \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & - \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -7 \end{pmatrix} = -0 + 5 + 1 = 6$$

Altre proprietà che seguono subito dalla definizione o da un appropriato sviluppo di Laplace:

(iii) Scambiando due righe (o due colonne) il determinante cambia segno;

(iv) Se due righe (o due colonne) sono vettori proporzionali, allora il determinante è zero.

Introduciamo adesso il *prodotto vettoriale* in $\mathbf{R}^3$: si noti che il *prodotto vettoriale* non è definito nel piano $\mathbf{R}^2$, né in $\mathbf{R}^n$ per $n > 3$. È una nozione che *esiste solo in* $\mathbf{R}^3$. Il *prodotto vettoriale* è un'applicazione che ad una coppia di vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ associa un terzo vettore $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$. Nella seguente definizione usiamo la seguente notazione: $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ denotano i versori dei tra assi coordinati, cioé $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Definizione. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$. Il *prodotto vettoriale* $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il vettore di $\mathbf{R}^3$ definito formalmente come

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & x_1 & y_1 \\ \mathbf{j} & x_2 & y_2 \\ \mathbf{k} & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

sviluppato secondo la prima riga, cioè

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - (x_1y_3 - x_3y_1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (x_1y_2 - x_2y_1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2y_3 - x_3y_2\\x_3y_1 - x_1y_3\\x_1y_2 - x_2y_1\end{pmatrix}.$$

A questo punto abbiamo la seguente interpretazione geometrica del determinante. Usiamo la seguente

Notazione. Dati tre vettori $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{R}^3$ denotiamo

$$(\,\mathbf{x}\quad\mathbf{y}\quad\mathbf{z}\,)$$

la matrice le cui colonne sono rispettivamente $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$. In altre parole: $(\,\mathbf{x}\quad\mathbf{y}\quad\mathbf{z}\,) = \begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix}$

Proposizione 4.7. *Siano* $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{R}^3$. *Allora*

$$\det(\,\mathbf{x}\quad\mathbf{y}\quad\mathbf{z}\,) = \mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}\times\mathbf{z})$$

Dimostrazione. Per definizione $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}\times\mathbf{z}) = x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1)$, cioè lo sviluppo di $\det(\,\mathbf{x}\quad\mathbf{y}\quad\mathbf{z}\,)$ secondo la prima colonna. bigskip

Abbiamo inoltre

Proposizione 4.8. *Siano* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^3$. *Il prodotto vettoriale* $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ *gode delle seguenti proprietà:*

(i)

$$\mathbf{y}\times\mathbf{x} = -\mathbf{x}\times\mathbf{y};$$

(ii) Il vettore $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ *è perpendicolare sia ad* $\mathbf{x}$ *che a* $\mathbf{y}$*:*

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) = 0,$$
$$\mathbf{y}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) = 0;$$

(iii) La norma di $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ *soddisfa*

$$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\||\operatorname{sen}\varphi|,$$

dove φ *è l'angolo fra* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$. *Dunque* $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|$ *è uguale all'area del parallelogramma di vertici* $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *e* $\mathbf{x}+\mathbf{y}$,

Dimostrazione. *(i)* Direttamente dalla definizione, o usando il fatto che, scambiando due colonne, il determinante cambia segno. *(ii)* Per la proposizione precedente, $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) = \det(\,\mathbf{x}\quad\mathbf{x}\quad\mathbf{y}\,)$, cioè il determinante di una matrice con due colonne uguali, che è zero per la proprietà (iv) del determinante. Questo dimostra che $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ sono perpendicolari. Similmente troviamo $\mathbf{y}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) = 0$.
Per la parte *(iii)* abbiamo

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2\operatorname{sen}^2\varphi &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2(1-\cos^2\varphi)\\
&= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2\\
&= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) - (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\\
&= x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_3y_1y_3 - 2x_2x_3y_2y_3\\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2\\
&= \|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2.
\end{aligned}$$

Estraendo le radici quadrate, troviamo l'uguaglianza cercata. Poichè poi $\|\mathbf{x}\|$ è la lunghezza della base del parallegramma costruito su $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ e $\|\mathbf{y}\||\operatorname{sen}\varphi|$ è l'altezza (o viceversa), abbiamo dimostrato anche l'ultima parte dell'enunciato (iii).

Proposizione 4.9. *(i) Il parallelepipedo di spigoli i vettori* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *e* $\mathbf{z}$ *ha volume* V *dato da*

$$V = |\det(\,\mathbf{x}\quad\mathbf{y}\quad\mathbf{z}\,)|$$

(ii) $\det(\,\mathbf{x}\quad\mathbf{y}\quad\mathbf{z}\,) = 0$ *se e solo se almeno uno dei vettori* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *e* $\mathbf{z}$ *sta nel piano (o nella retta) passante per l'origine e generato dagli altri due.*

Dimostrazione. (i) Il volume V del parallelepipedo di spigoli $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ è uguale all'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ moltiplicata per l'altezza. L'altezza è uguale alla lunghezza della proiezione del vettore $\mathbf{z}$ sulla retta che passa per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$.

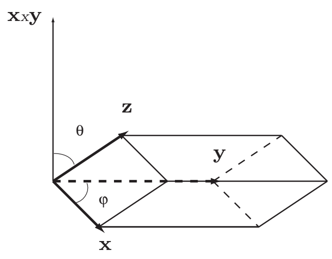

Fig.8. Il parallelepipedo di spigoli $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

Per la Prop.4.8, l'area del parallelogramma è uguale a $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\||\operatorname{sen}\varphi|$, ove φ è l'angolo fra i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, e la lunghezza della proiezione di $\mathbf{z}$ sulla retta per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ è uguale a $\|\mathbf{z}\||\cos\vartheta|$, ove ϑ è l'angolo fra i vettori $\mathbf{z}$ e $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$. Il volume V è quindi dato da

$$\begin{aligned} V &= \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\||\operatorname{sen}\varphi|\|\mathbf{z}\||\cos\vartheta| \\ &= \|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|\|\mathbf{z}\||\cos\vartheta| \\ &= |\mathbf{z}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y})| \\ &= |\det(\mathbf{x} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{z})|. \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla proposizione precedente, la terza dalla prop. 1.3 (prima dispensa) e l'ultima uguaglianza segue dalla Proposizione 4.7.
(ii) Segue dal punto (i) e dal fatto che un parallelepipedo ha volume zero se e solo ha dimensione due o uno, cioè almeno uno dei vettori sta nel piano generato dagli altri due (se ha dimensione due) oppure, nel caso dimensione uno, se tutti e tre i vettori sono proprozionali.

Definizione. *L'orientazione* $\mathrm{Or}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ di tre vettori $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{R}^3$ è il segno del determinante

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Si dice che $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ sono orientati *positivamente* se $\mathrm{Or}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})>0$.

Per esempio, i vettori $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ sono orientati positivamente perchè

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1+0+0-0-0-0=1.$$

Scambiare due vettori cambia il segno dell'orientazione:

$$\mathrm{Or}(\mathbf{y},\mathbf{x},\mathbf{z}) = -\mathrm{Or}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

Geometricamente, tre vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono orientati positivamente se possono essere identificati rispettivamente con il medio, il pollice e l'indice della mano destra. Altrimenti sono orientati negativamente e possono essere identificati rispettivamente con il medio, il pollice e l'indice della mano sinistra.

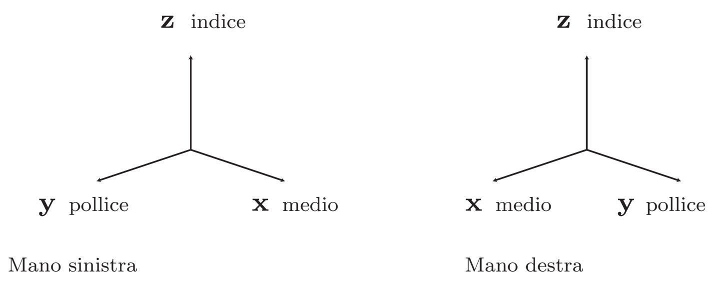

Fig.9. L'orientazione.

Osservazione. I vettori $\{\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ e $\mathbf{x}\times\mathbf{y}\}$ formano una terna di vettori orientata positivamente.

Esercizi.

(4.A) Siano $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ e $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ due vettori in $\mathbf{R}^3$.
- (i) Calcolare $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, $\mathbf{x}+3\mathbf{y}$ e $-2\mathbf{x}+\mathbf{y}$.
- (ii) Calcolare le lunghezze di questi vettori.

(4.B) Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ i vettori dell'Eserc.4.A.
- (i) Calcolare i prodotti scalari $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ e anche $\mathbf{x}\cdot(5\mathbf{x}+7\mathbf{y})$.
- (ii) Calcolare il coseno dell'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
- (iii) Calcolare il coseno dell'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y}$.

(4.C) Sia $\mathbf{x}$ il vettore dell'Eserc.4.A.
- (i) Trovare un vettore $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ tale che $\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}=0$.
- (ii) Trovare un vettore $\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$ tale che

$$\begin{cases}\mathbf{x}\cdot\mathbf{w} &=0,\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} &=0.\end{cases}$$

(4.D) Sia $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^3$ un vettore non nullo. Sia $\lambda=\|\mathbf{v}\|$.
- (i) Calcolare la lunghezza di $\frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$.
- (ii) Trovare un vettore parallelo a $\mathbf{v}$ che abbia lunghezza $1/\lambda$.

(4.E) Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due vettori in $\mathbf{R}^3$. Sia

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}(x_1+y_1)/2\\(x_2+y_2)/2\\(x_3+y_3)/2\end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare le distanze $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{y}-\mathbf{v}\|$.
- (ii) Far vedere che $\mathbf{v}$ è il punto medio fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(4.F) Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ i due vettori dell'Eserc.4.A.
- (i) Calcolare $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$.
- (ii) Calcolare $\mathbf{x}\times(-\mathbf{y})$.
- (iii) Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(4.G) Siano $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.
- (i) Trovare un vettore $\mathbf{v}$ perpendicolare sia a $\mathbf{x}$ che a $\mathbf{y}$.
- (ii) Trovare un vettore come nella parte (i), di lunghezza 1.

(4.H) Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
(ii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $2\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
(iii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
(iv) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}+5\mathbf{y}+7\mathbf{z}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

(4.I) Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori in $\mathbf{R}^3$ dati da

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare le lunghezze di $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ e i coseni degli angoli fra $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
(ii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}+5\mathbf{y}+7\mathbf{z}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

(4.J) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(i) Calcolare i vettori $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z}$ ed $\mathbf{x}\times(\mathbf{y}\times\mathbf{z})$.
(ii) Calcolare $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z}$ ed $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}\times\mathbf{z})$.

(4.K) Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori dell'Eserc.4.H.
(i) Calcolare l'orientazione $\mathrm{Or}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$.
(ii) Calcolare l'orientazione $\mathrm{Or}(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{x})$.
(iii) Calcolare l'orientazione $\mathrm{Or}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y})$.

(4.L) Siano $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_8 \in \mathbf{R}^3$ gli otto punti in $\mathbf{R}^3$ dati da

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_7 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_8 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Far vedere che $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ e $\mathbf{x}_4$ sono i vertici di un parallelogramma.
(ii) Far vedere che $\mathbf{x}_i+\mathbf{x}_5=\mathbf{x}_{i+4}$ per ogni i, $1\le i\le 4$.
(iii) Far vedere che $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_8$ formano i vertici di un parallelepipedo. Calcolarne il volume.

(4.M) Siano $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{R}^3$ e supponiamo che $\mathrm{Or}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=+1$.
(i) Far vedere che i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ si possono mettere in ordine in *sei* modi diversi: $\mathbf{x},\mathbf{z},\mathbf{y}$ oppure $\mathbf{z},\mathbf{x},\mathbf{y}$ ecc.
(ii) Per tutti i sei modi calcolare l'orientazione: $\mathrm{Or}(\mathbf{x},\mathbf{z},\mathbf{y})$, $\mathrm{Or}(\mathbf{z},\mathbf{x},\mathbf{y})$ ... ecc.

(4.N) Siano $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ numeri non nulli che soddisfano $\alpha+\beta+\gamma=0$. Consideriamo i seguenti vettori in $\mathbf{R}^3$:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta\gamma \\ \gamma\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \beta\gamma \\ \gamma\alpha \\ \alpha\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \gamma\alpha \\ \alpha\beta \\ \beta\gamma \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare gli angoli fra i vettori $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$.
(ii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$.