

2. Rette in $\mathbf{R}^2$; circonferenze.

In questo paragrafo studiamo le rette e le circonferenze in $\mathbf{R}^2$. Ci sono due modi per descrivere una retta in $\mathbf{R}^2$: mediante una *equazione cartesiana* oppure mediante una *equazione parametrica*.

Una *equazione cartesiana* di una retta ha la forma

$$ax_1 + bx_2 + c = 0,$$

dove $a, b, c \in \mathbf{R}$ ed a, b non sono entrambi nulli. La retta consiste nei punti $\mathbf{x}$ le cui coordinate soddisfano l'equazione suddetta. Per esempio, per $a = 2$, $b = -3$ e $c = 1$ abbiamo la retta

$$r : 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0.$$

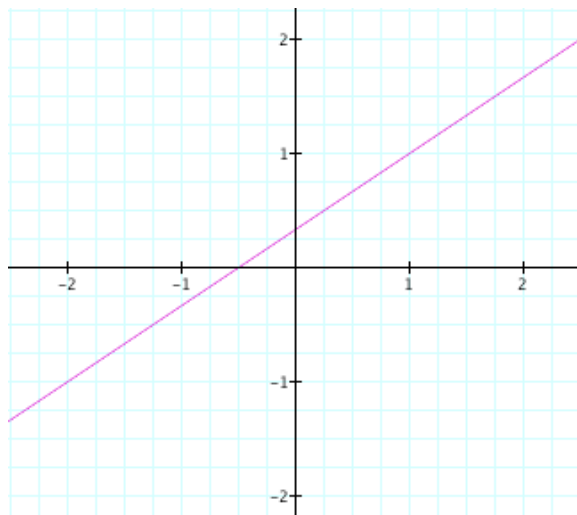


Fig.13 La retta $r : 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$.

Per ogni $x_1 \in \mathbf{R}$, c'è un unico punto $\mathbf{x}$ sulla retta r con la prima coordinata uguale a x_1 . L'altra coordinata di $\mathbf{x}$ è data da $x_2 = (2x_1 + 1)/3$. Per esempio, i punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ stanno tutti sulla retta r . Nota bene che due equazioni distinte possono descrivere la stessa retta: per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ non nullo, le equazioni

$$ax_1 + bx_2 + c = 0 \quad \text{e} \quad \lambda ax_1 + \lambda bx_2 + \lambda c = 0$$

descrivono la stessa retta. Sia l'equazione $20x_1 - 30x_2 + 10 = 0$ che l'equazione $2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$ descrivono la retta r .

Una *equazione parametrica* di una retta ha la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + tv_1 \\ p_2 + tv_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

ove $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ è un punto sulla retta e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ è un vettore parallelo alla retta.

Al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$, il punto $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ varia fra tutti i punti della retta; il punto $\mathbf{p}$ corrisponde a $t = 0$. Per $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ troviamo ad esempio la retta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

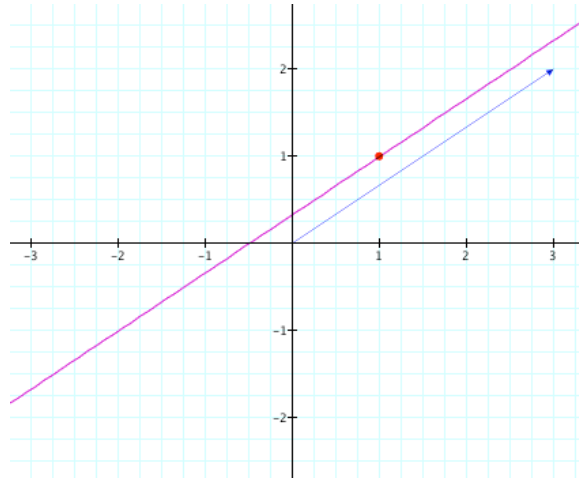


Fig.14 La retta $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Assegnando al parametro $t \in \mathbf{R}$ i valori $t = 0$, $t = 1$ e $t = -1/3$ troviamo rispettivamente i punti di coordinate

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che due equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \mathbf{p}' + s\mathbf{v}', \quad s \in \mathbf{R}$$

descrivono la stessa retta l , ogni volta che $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$ sono punti di l ed i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ sono paralleli ad l . Ciò accade precisamente quando $\mathbf{v}' = \lambda\mathbf{v}$ per qualche $\lambda \in \mathbf{R}$, non nullo. Per esempio, le equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

descrivono la retta r .

Definizione. Un vettore *normale* ad una retta è un vettore $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ che è perpendicolare alla retta.

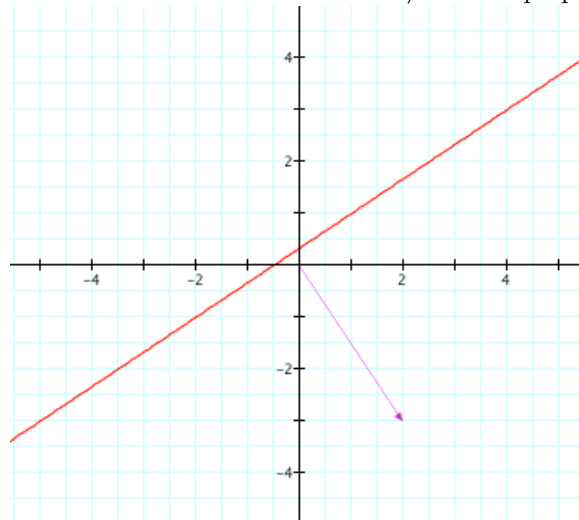


Fig.15 La retta $r : 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$; un vettore normale ad r .

Proposizione 2.1. Sia l la retta di equazione cartesiana

$$(1) \quad ax_1 + bx_2 = c.$$

Allora, il vettore $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è un vettore normale a l . Dunque l'equazione (1) ha la forma

$$(2) \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$$

dove $\mathbf{n}$ è un vettore normale a l e $\mathbf{p}$ è un qualsiasi punto di l .

Dimostrazione. Notiamo che $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non è zero perchè a, b non sono entrambi nulli. Verifichiamo che $\mathbf{n}$ è perpendicolare alla retta. Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due punti distinti della retta. Allora il vettore $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ è parallelo alla retta.

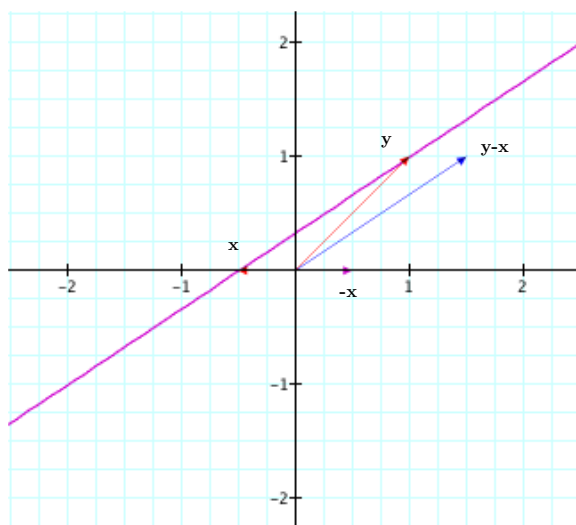


Fig.16 Il vettore $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ è parallelo alla retta.

Calcolando il prodotto scalare $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}$, troviamo

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (x_1 - y_1)a + (x_2 - y_2)b \\ &= (ax_1 + bx_2) - (ay_1 + by_2) = c - c = 0. \end{aligned}$$

Dunque la retta l ed il vettore $\mathbf{n}$ sono perpendicolari, come richiesto. Fissando un punto $\mathbf{y} := \mathbf{p}$ sulla retta l , si ha che $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = ax_1 + by_2 = c$ si ha che un punto $\mathbf{x}$ appartiene a l se e solo se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$, cioè $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$.

Dalla proposizione segue in particolare che il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ è parallelo alla retta l .

Negli esempi che seguono, applichiamo i concetti fin qui esposti alla risoluzione di alcuni problemi geometrici nel piano.

Esempio 2.2. (*La retta per due punti distinti*) Siano dati due punti distinti $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ in $\mathbb{R}^2$. Come calcolare un'equazione parametrica e un'equazione cartesiana della retta l passante per $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$? Per ottenere un'equazione parametrica di l , basta trovare un punto $\mathbf{p}$ su l e un vettore $\mathbf{v}$ parallelo ad l . Ad esempio, dati i punti

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

prendiamo

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo così l'equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Per trovare un'equazione cartesiana della retta l , determiniamo a , b , c in modo che l'equazione $ax_1 + bx_2 = c$ sia soddisfatta dai punti dati. Nel caso in questione, dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} a + 2b = c \\ -2a + 4b = c. \end{cases}$$

Troviamo $a = c/4$ e $b = 3c/8$, ed un'equazione cartesiana di l è per esempio

$$2x_1 + 3x_2 = 8.$$

Osservazione. Possiamo anche ricavare un'equazione cartesiana di l a partire da quella parametrica. Questo si può fare osservando che $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ è un vettore normale alla retta, e dunque l'equazione cartesiana ha la forma $2x_1 + 3x_2 = c$, e poi determinando $c = 8$ imponendo che l'equazione sia soddisfatta da $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ (o da qualsiasi altro punto della retta a noi noto).

Oppure, eliminando t dalle due equazioni

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 3t, \\ y_1 &= 2 - 2t. \end{aligned}$$

In questo modo, troviamo $t = (x_1 - 1)/3 = (y_1 - 2)/(-2)$ e quindi $2x_1 + 3y_1 - 8 = 0$.

Osservazione. Per passare da un'equazione cartesiana ad un'equazione parametrica di una data retta, è sufficiente risolvere l'equazione cartesiana. Ad esempio, data la retta l di equazione cartesiana

$$2x_1 + 3x_2 = 8$$

abbiamo $x_1 = 4 - (3/2)x_2$. Dunque la retta l è formata da tutte le coppie della forma $\begin{pmatrix} 4 - (3/2)x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ al variare di x_2 in $\mathbf{R}$. Dunque abbiamo l'equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si osservi che è diversa da quella da cui siamo partiti, cioè

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

ma non è un errore! Sono semplicemente due diverse equazioni parametriche della stessa retta.

Date due rette in $\mathbf{R}^2$ ci sono tre possibilità: le rette si intersecano in un punto, sono parallele oppure coincidono. Per determinare quale situazione si verifichi, ci si riduce sempre a studiare un sistema di equazioni lineari. Se il sistema non ha soluzioni, le due rette sono parallele; se ha un'unica soluzione, le due rette si intersecano in un unico punto e se il sistema ammette infinite soluzioni, le due rette coincidono.

Esempio 2.3. (*Intersezioni fra rette*)

1. Siano l e m due rette di equazioni cartesiane

$$2x_1 - 3x_2 + 1 = 0, \quad 4x_1 - 6x_2 = 0.$$

Per trovarne l'intersezione risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -1 \\ 4x_1 - 6x_2 = 0. \end{cases}$$

Vediamo che 2 volte la prima equazione meno la seconda ci dà $2(2x_1 - 3x_2) - (4x_1 - 6x_2) = 2 \cdot -1 - 0$, cioè $0 = -1$. Siccome questo è assurdo, il sistema non ha soluzioni e le due rette sono parallele.

2. Siano l e m due rette di equazioni

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Per calcolarne l'intersezione, imponiamo ad un generico punto $\mathbf{x}$ di appartenere sia ad l che a m ; cerchiamo dunque t ed s tali che

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s \\ 1-2s \end{pmatrix}.$$

Questo ci dà un sistema di due equazioni nelle due incognite t ed s

$$\begin{cases} 3s = 1 \\ t + 2s = -1. \end{cases}$$

Si vede facilmente che l'unica soluzione è data da $t = -5/3$ ed $s = 1/3$, corrispondente al punto in comune $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

3. Sia l la retta di equazione cartesiana $x_1 - 3x_2 + 2 = 0$ e sia m la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Per trovare l'intersezione fra l ed m , sostituiamo il generico punto di m , di coordinate $x_1 = 1 + 3t$ e $x_2 = 1 + t$ nell'equazione di l . Troviamo $(1 + 3t) - 3(1 + t) + 2 = 0$, cioè $0 = 0$. Questa equazione è dunque soddisfatta per *ogni* valore di t . In altre parole, tutti i punti di m soddisfano l'equazione di l e le due rette coincidono.

Esempio 2.4. (*Rette ortogonali*) Data una retta l e un punto $\mathbf{q}$, come calcolare un'equazione della retta m perpendicolare a l e passante per $\mathbf{q}$? Per avere un'equazione parametrica $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ di m , abbiamo bisogno di un punto $\mathbf{p}$ su m e di un vettore parallelo ad m . Poiché m deve passare per $\mathbf{q}$, possiamo prendere $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ e, poiché m deve essere perpendicolare ad l , il vettore $\mathbf{v}$ deve essere perpendicolare ad m .

Ad esempio, sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

e sia $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. In questo caso, prendiamo $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ per $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, che è ortogonale a $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e ad l . Un'equazione parametrica per la retta m è dunque

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

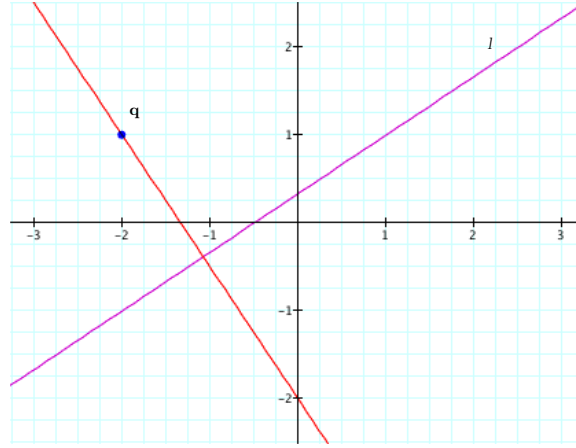


Fig.17 La retta per $\mathbf{q}$ perpendicolare ad l .

Osservazione. Se nell'Esempio 2.4 la retta l fosse stata in forma cartesiana $ax_1 + bx_2 + c = 0$, sarebbe stato ancora più facile trovare un vettore $\mathbf{v}$ normale ad l : per la Prop.2.1, avremmo potuto prendere direttamente $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Esempio 2.5. (*Distanza di un punto da una retta*) Dati una retta $l = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ e un punto $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^2$, come calcolare la distanza di $\mathbf{q}$ da l ? Per trovare la distanza fra $\mathbf{q}$ ed l , calcoliamo la proiezione $\mathbf{q}'$ del punto $\mathbf{q}$ su l . Il punto $\mathbf{q}'$ non è altro che l'intersezione di l con la retta perpendicolare ad l passante per $\mathbf{q}$. La distanza di $\mathbf{q}$ da l è data esattamente da

$$d(\mathbf{q}, l) = d(\mathbf{q}, \mathbf{q}').$$

Per trovare il punto $\mathbf{q}'$ e la distanza $d(\mathbf{q}, l)$ il modo più breve è il seguente: applichiamo la Proposizione 1.6 della dispensa precedente (cioè: 1. Geometria di $\mathbf{R}^2$) sulla proiezione ortogonale e decomponiamo $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ come somma di una parte parallela a $\mathbf{v}$ e di una parte perpendicolare a $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = c\mathbf{v} + \mathbf{w} \quad \text{con } c \in \mathbf{R} \text{ e } \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$$

ne segue subito che

$$\mathbf{q}' = \mathbf{p} + c\mathbf{v} \quad \text{e} \quad d(\mathbf{q}, l) = \|\mathbf{w}\|$$

Si noti che, ancora per la Proposizione 1.6, $\mathbf{w}$ è a sua volta la proiezione di $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ sulla retta passante per $\mathbf{0}$ e un vettore $\mathbf{n}$ normale alla retta.

Se prendiamo, ad esempio, $\mathbf{q}$ ed l come nell'Esempio 2.4, possiamo prendere $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, e la decomposizione di cui sopra è

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{-20}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{15}{25} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(gli scalari sono ottenuti con la formula della proiezione ortogonale, cioè rispettivamente $(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} / \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ e $(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} / \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$). Dunque

$$d(\mathbf{q}, l) = \left\| \frac{15}{25} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3}{5} \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = 3$$

Si ha anche che

$$\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{-20}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/5 \\ -6/5 \end{pmatrix}$$

Fig.18 La distanza fra $\mathbf{q}$ ed l .

Osservazione. (*Formula della distanza punto retta*) Se la retta l è data in forma cartesiana

$$ax_1 + bx_2 = c,$$

cioè

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0 \quad \text{con } \mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{p} \text{ un punto della retta e quindi } \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = c$$

si ha, come abbiamo visto sopra, che

$$d(\mathbf{q}, l) = \left\| \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} \right\| = \left\| \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n} \right\| = \left\| \frac{aq_1 + bq_2 - c}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n} \right\| = \frac{|aq_1 + bq_2 - c|}{\|\mathbf{n}\|^2} \|\mathbf{n}\|^2 = \frac{|aq_1 + bq_2 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Osservazione. Analogamente, per calcolare la distanza fra due rette parallele, basta scegliere un punto P su una delle due rette e calcolare la distanza di P dall'altra retta.

Definizione. Una *circonferenza* in $\mathbf{R}^2$ di centro $\mathbf{c}$ e raggio r è l'insieme dei punti che ha distanza uguale ad r da $\mathbf{c}$.

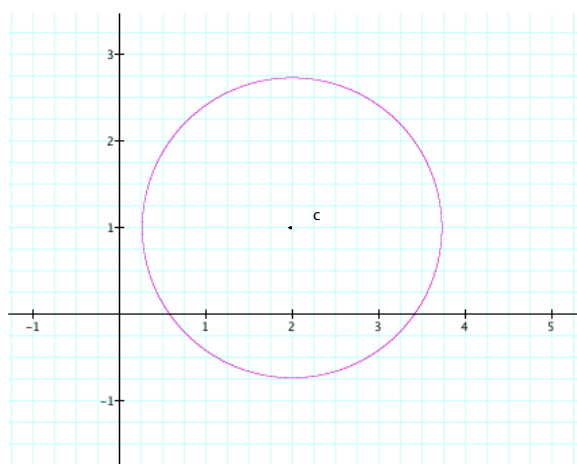


Fig.19 La circonferenza di centro $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio $r = \sqrt{3}$.

Poiché i punti $\mathbf{x}$ sulla circonferenza di centro $\mathbf{c}$ e raggio r sono esattamente quelli che soddisfano

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = r,$$

e l'equazione della circonferenza risulta

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2.$$

Date una retta ed una circonferenza nel piano, ci sono tre possibilità: si intersecano in due punti, si intersecano in un unico punto e la retta è tangente alla circonferenza, oppure non si intersecano affatto. Se la circonferenza ha equazione $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$ e la retta ha equazione $ax_1 + bx_2 = c$, si tratta di risolvere il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2 \\ ax_1 + bx_2 = c. \end{cases}$$

Esempio 2.6. (*Intersezione fra una retta e una circonferenza*) Consideriamo, ad esempio, la circonferenza C di equazione

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9$$

e la retta l di equazione $x_1 - x_2 + 2 = 0$. L'intersezione $C \cap l$ è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione la relazione $x_1 = x_2 - 2$, troviamo $x_2 = 4$ e $x_2 = 1$. I due punti di intersezione corrispondenti sono quindi

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo adesso l'intersezione di C con la retta m di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Sostituendo il punto generico della retta m nell'equazione della circonferenza, troviamo $(-t - 2)^2 + ((t - 10) - 1)^2 = 9$, ossia l'equazione

$$t^2 - 9t + 58 = 0.$$

Poiché questa equazione non ha soluzioni reali, la circonferenza C e la retta m non si incontrano.

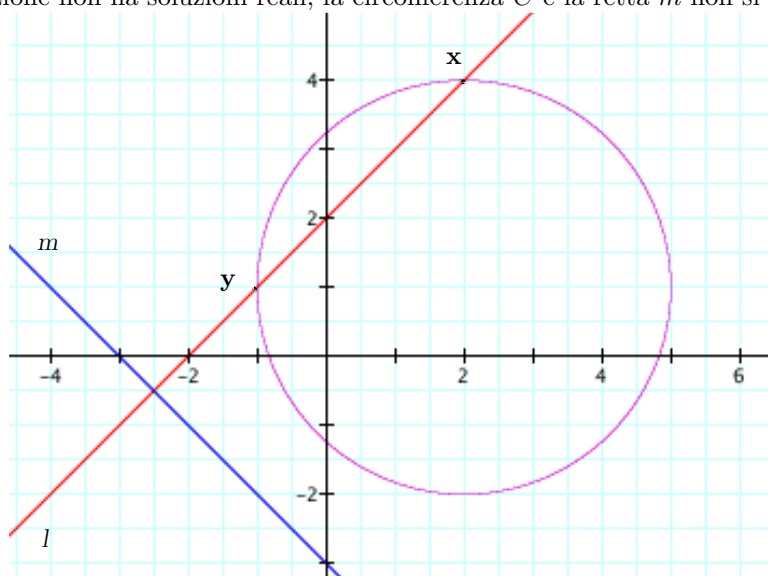


Fig.20. La circonferenza C e le rette l ed m .

Osservazione. (*Intersezione di due circonferenze*) Per calcolare l'intersezione di due circonferenze C di equazione $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$ e C' di equazione $(x_1 - g_1)^2 + (x_2 - g_2)^2 = R^2$, bisogna risolvere il sistema non lineare

$$\begin{aligned} (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 &= r^2 \\ (x_1 - g_1)^2 + (x_2 - g_2)^2 &= R^2. \end{aligned}$$

Osserviamo innanzitutto che, se le circonferenze hanno lo stesso centro, o coincidono o non si incontrano mai. Supponiamo allora che le circonferenze non abbiano lo stesso centro. Sottraendo le due equazioni una dall'altra otteniamo un'equazione di primo grado

$$2(g_1 - c_1)x_1 + 2(g_2 - c_2)x_2 = r^2 - R^2 + (g_1^2 - c_1^2) + (g_2^2 - c_2^2).$$

Geometricamente, questa equazione definisce una retta l , perpendicolare al vettore $\mathbf{g} - \mathbf{c}$. I punti di intersezione fra le due circonferenze sono esattamente i punti di intersezione di l con una di esse.

Proposizione 2.7. Sia $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$ una circonferenza C in $\mathbf{R}^2$ di centro $\mathbf{c}$ e raggio r . Un'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto $\mathbf{q} \in C$ è data da

$$(q_1 - c_1)(x_1 - q_1) + (q_2 - c_2)(x_2 - q_2) = 0.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}$ un punto arbitrario su detta tangente. Poiché la tangente in $\mathbf{q}$ è perpendicolare alla retta passante per $\mathbf{q}$ ed il centro della circonferenza $\mathbf{c}$, si ha che

$$(\mathbf{q} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{x}) = 0$$

come richiesto.

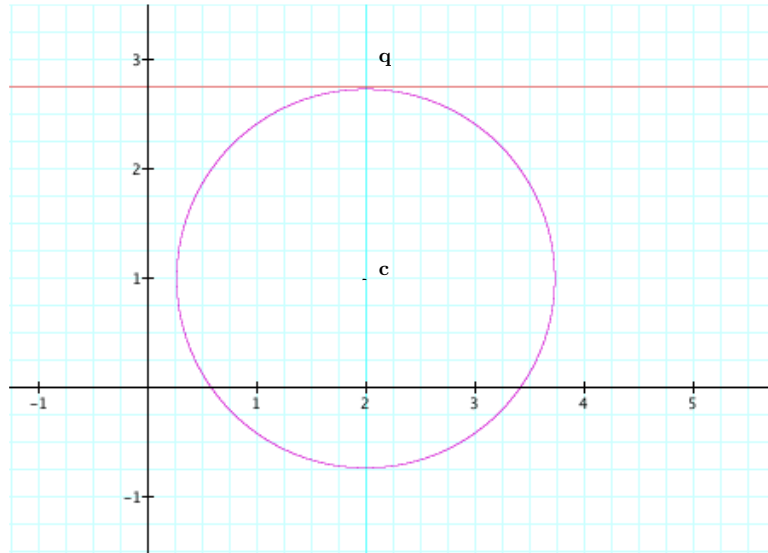


Fig.21 La retta tangente ad una circonferenza C in un punto $\mathbf{q}$.

Esempio 2.8. (*Rette tangenti ad una circonferenza*) Siano dati una circonferenza C e un punto $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^2$ che non appartiene a C . Come calcolare le tangenti a C uscenti da $\mathbf{p}$? Osserviamo innanzitutto che se $\mathbf{p}$ è interno alla circonferenza, di tangenti a C uscenti da $\mathbf{p}$ non ne esistono; se invece $\mathbf{p}$ è esterno alla circonferenza, esistono esattamente due rette tangenti a C uscenti da $\mathbf{p}$. Siano $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ i corrispondenti punti di tangenza. Allora $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ devono stare sulla circonferenza C e al tempo stesso sulla circonferenza C' , di centro $\mathbf{p}$ e raggio $R = \sqrt{d(\mathbf{c}, \mathbf{p})^2 - r^2}$. In altre parole, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ sono i punti di intersezione di $C \cap C'$.

Sia ad esempio C la circonferenza data da

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9$$

e sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, un punto esterno a C . Allora le tangenti a C uscenti da $\mathbf{p}$ sono le rette r_1 , per $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, ed r_2 , per $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}'$, ove $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ sono dati dall'intersezione delle circonferenze C e C'

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9 \\ (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 5)^2 = 16. \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni una dall'altra, troviamo l'equazione della retta l

$$3x_1 - 4x_2 + 7 = 0$$

che incontra C e C' nei punti $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$. Per esempio, intersecando l con C , troviamo

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} 71/25 \\ 97/25 \end{pmatrix}.$$

Le tangenti cercate sono così

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 96/25 \\ -28/25 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

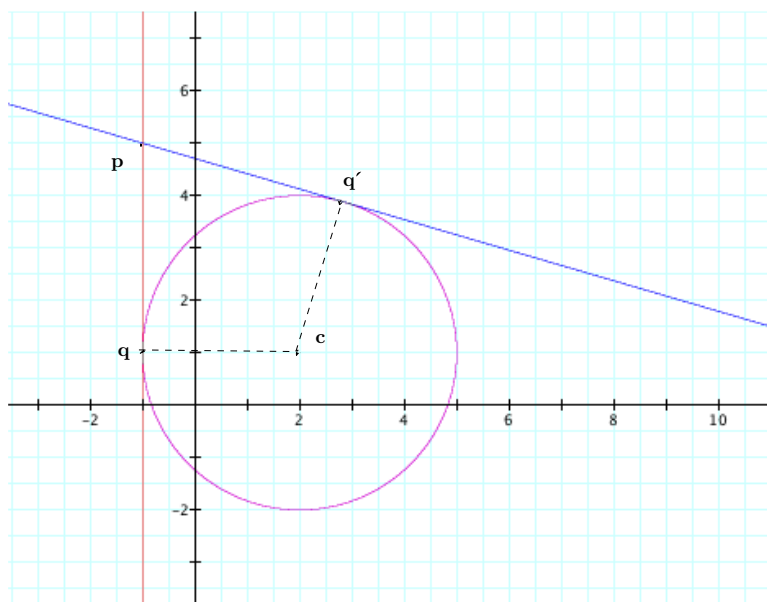


Fig.22 Le tangenti alla circonferenza C uscenti da $\mathbf{p}$.

Osservazione. Per la Prop.2.7, la tangente a C in un generico punto $\mathbf{q} \in C$ è data da

$$(q_1 - 2)(x_1 - q_1) + (q_2 - 1)(x_2 - q_2) = 0.$$

Poiché le tangenti cercate devono passare per il punto dato $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, le coordinate di $\mathbf{q}$ devono anche soddisfare la relazione

$$(q_1 - 2)(-1 - q_1) + (q_2 - 1)(5 - q_2) = 0.$$

E' facile verificare che questa non è altro che la condizione $\mathbf{q} \in C'$.

Esercizi.

- (2.A) Sia $\mathbf{x}$ il vettore dell'Eserc.1.B: $\mathbf{x}$ ha norma $\|\mathbf{x}\| = 1$ e forma un angolo φ con l'asse delle ascisse.
- (i) Sia $\mathbf{y}$ la riflessione del vettore $\mathbf{x}$ rispetto alla retta $x_1 = x_2$. Far vedere che l'angolo che $\mathbf{y}$ forma con l'asse delle ascisse è uguale a $\pi/2 - \varphi$.
 - (ii) Dimostrare che

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi.$$

- (2.B) Sia $\mathbf{x}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Trovare altri tre punti sulla retta r che passa per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{x}$.

- (2.C) Sia T il triangolo di vertici

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare le coordinate dei punti medi M_1 , M_2 ed M_3 dei lati di T .

- (ii) Calcolare le equazioni delle tre rette l_1, l_2, l_3 passanti per un vertice del triangolo e per il punto medio M_i ad esso opposto.
 - (iii) Calcolare i punti di intersezione fra le tre rette l_1, l_2 e l_3 .
- (2.D) Siano l e m le rette in $\mathbf{R}^2$ date dalle equazioni cartesiane

$$2x_1 - 3x_2 + 1 = 0, \quad 3x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

- (i) Trovare equazioni parametriche per l ed m .
 - (ii) Calcolare l'intersezione di l ed m .
- (2.E) Siano l e m le rette in $\mathbf{R}^2$ date dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

- (i) Trovare equazioni cartesiane per l ed m .
 - (ii) Calcolare l'intersezione di l ed m .
- (2.F) Sia l la retta in $\mathbf{R}^2$ di equazione $x_1 = 3$.
- (i) Trovare un vettore normale ad l .
 - (ii) Trovare un altro vettore normale ad l .
 - (iii) Calcolare un'equazione parametrica per l .
 - (iv) Calcolare un'altra equazione parametrica per l .
- (2.G) Sia l la retta data dall'equazione $x_1 - x_2 = 7$. Sia m la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

- (i) Calcolare il punto di intersezione di l ed m .
- (2.H) Sia l la retta di equazione $2x_1 + 2x_2 + 3 = 0$. Sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- (i) Calcolare un'equazione cartesiana per la retta m_1 che passa per $\mathbf{p}$ ed è parallela ad l .
 - (ii) Calcolare un'equazione cartesiana per la retta m_2 che passa per $\mathbf{p}$ ed è ortogonale ad l .
 - (iii) Trovare il punto di intersezione di m_1 ed m_2 .

- (2.I) Sia $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

- (i) Calcolare la proiezione ortogonale del punto $\mathbf{q}$ sulla retta l .
 - (ii) Calcolare la distanza fra $\mathbf{q}$ ed l .
- (2.J) Siano
- $$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
- (i) Calcolare equazioni cartesiane per le tre rette, passanti per due dei tre punti $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$.
 - (ii) Trovare vettori normali ad ognuna delle tre rette.
- (2.K) Sia C la circonferenza data da $x_1^2 + x_2^2 = 8$ e siano l_1, l_2 e l_3 le rette date da $x_1 + x_2 = 4$, da $x_1 + x_2 = 3$ e da $x_1 + x_2 = 5$. Calcolare le intersezioni $C \cap l_i$ per $i = 1, 2, 3$. Fare un disegno di C e delle tre rette.
- (2.L) Sia C_1 la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio $\sqrt{2}$ e sia C_2 la circonferenza di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 + 4x_2 = 0.$$

Calcolare l'intersezione $C_1 \cap C_2$. Fare un disegno.

(2.M) Sia C_1 la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio $\sqrt{2}$ e sia C_2 la circonferenza di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 = 20.$$

Calcolare l'intersezione $C_1 \cap C_2$. Fare un disegno.

(2.N) Sia C la circonferenza data da

$$x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 8x_2 + 7 = 0.$$

Calcolare le tangenti a C uscenti dai punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2.O) Sia C la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e raggio 37 e sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 102 \\ -97 \end{pmatrix}$.

- (i) Calcolare il punto $\mathbf{q}_1 \in C$ più vicino a $\mathbf{p}$.
- (ii) Calcolare il punto $\mathbf{q}_2 \in C$ più lontano da $\mathbf{p}$.
- (iii) Calcolare la distanza fra $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$.

(2.P) Dati due punti P e Q in $\mathbf{R}^2$, determinare l'insieme dei punti equidistanti da P e Q .