Alcuni esercizi su matrici invertibili e matrici inverse

.

1. Siano $A, B \in M_{n,n}$ due matrici invertibili. Dimostrare che AB è invertibile e che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Sia A una matrice invertibile. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, A^n è invertibile (N.B. dato $n \in \mathbf{N}$, con A^n si intende la matrice $A \cdot \cdots \cdot A$ (n volte). (b) Dimostrare che, se A è invertibile, $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. (a) Determinare A^{-1}.

(b) Sia $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Determinare tutte le matrici B tali che $AB = C$.

4. Sia $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (a) Calcolare la matrice C^{-1}. (b) Calcolare la matrice $(C^2)^{-1}$ (senza calcolare C^2).

5. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'inversa di A.

(b) Si consideri, per ogni $t \in \mathbf{R}$, la matrice $B_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & t & 0 \end{pmatrix}$. Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ esiste una matrice $X \in M_3$ tale che $B_t X = A$.

6. Siano $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (a) Determinare l'inversa di A e l'inversa di B.

(b) Senza calcolare AB, determinare l'inversa di AB.

(c) Senza calcolare BA, determinare l'inversa di BA.

7. Siano: $A_1 = (0,0,1,1)$, $A_2 = (1,-2,0,1)$, $A_3 = (0,1,2,1)$, $A_4 = (0,0,1,0)$. (a) Verificare che $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ è una base di $\mathcal{V}_4$. (b) Per ogni $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$ determinare (in funzione di x,y,z,t) le coordinate di (x,y,z,t) rispetto alla base $\mathcal{B}$.

8. Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $T((1,0,3)) = (1,1,2)$, $T((2,0,1) = (3,1,0)$, $T((1,1,0) = (2,1,0)$. (a) Dimostrare che T è biettiva.

(b) Calcolare $m_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T^{-1})$, dove $\mathcal{B} = \{(1,0,3),(2,0,1),(1,1,0)\}$ e $\mathcal{C} = \{(1,1,2),(3,1,0),(2,1,0)\}$.

(c) Calcolare $T^{-1}(3(1,1,2) + 2(3,1,0) - 4(2,1,0))$.

(d) Calcolare $T(2(1,0,3) + 5(2,0,1) - (2,1,0))$.

8. Si consideri, al variare di $t \in \mathbf{R}$, la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2+t & 0 \\ t & 1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$.

Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ la matrice A_t è invertibile.

9. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. (a) Determinare una matrice D tale che $AD = B$. (b) Determinare una matrice E tale che $EA = B$ e una matrice F tale che $FA = C$.