Alcuni esercizi su indipendenza lineare, basi e dimensione

1. Sia V_3 lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3.
(a) L'insieme $\mathcal{B} = \{1, (x-2), (x-2)^2, (x-2)^3\}$ è una base di V_3?
(b) In caso affermativo, scrivere il vettore delle coordinate del polinomio $x^3 - x^2 + 2x + 4$ rispetto a $\mathcal{B}$.

2. I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti? In caso negativo, esprimere uno di essi come combinazione lineare degli altri tre.

3. Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ tre vettori linearmente indipendenti. (a) $2\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}$, $\mathbf{x} + \mathbf{z}$ sono linearmente indipendenti? (b) $2\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}$, $3\mathbf{x} + 2\mathbf{y} - 2\mathbf{z}$ sono linearmente indipendenti?

4. Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ tre vettori linearmente dipendenti. (a) $2\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}$, $\mathbf{x} + \mathbf{z}$ sono linearmente indipendenti? (b) $2\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}$, $3\mathbf{x} + 2\mathbf{y} - 2\mathbf{z}$ sono linearmente indipendenti?

5. Consideriamo tre polinomi $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ rispettivamente di grado 4, 5 e 6. Quale dei seguenti enunciati 'e quello giusto? (a) Sono sempre linearmente dipendenti. (b) Sono sempre linearmente indipendenti. (c) Ci sono esempi in cui $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ sono dipendenti ed esempi in cui $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ sono indipendenti

6. Consideriamo una matrice a scale. I suoi vettori riga non-nulli sono sempre linearmente indipendenti? I suoi vettori colonna non-nulli sono sempre linearmente indipendenti?

7. Si considerino i vettori $\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}_t = \begin{pmatrix} t+2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ci sono dei valori di t per cui $\mathbf{x}_t, \mathbf{y}.\ \mathbf{z}_t$ sono linearmente dipendenti? In caso affermativo, per tali valori scrivere una relazione di dipendenza lineare ed esprimere uno dei tre come combinazione lineare dei rimanenti.

8. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado 8 i cui coefficienti dei monomi di grado dispari sono tutti nulli. Che dimensione ha V? Esibire due diverse basi di V.

9. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado 3 le cui derivata prima è identicamente nulla. Che dimensione ha V? Esibire una base di V.

10. Si consideri il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x - y + z - t + w & =0 \\ 2x + y + 2z - 3t & =0 \\ -x - y - z + 2t + 3w & =0 \end{cases}$. Determinare dimensione e una base dello spazio delle soluzioni.

11. Si consideri il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x - y + z - t + w & =0 \\ 2x + y + 2z - 3t & =0 \\ -x - z + 2t + w & =0 \end{cases}$. Determinare dimensione e una base dello spazio delle soluzioni.

12. Al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$ si consideri il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x - y + z - t + w & =0 \\ 2x + \lambda y + 2z - 3t & =0 \\ -x - y - z + 2t + 3w & =0 \end{cases}$. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$b, la dimensione dello spazio delle soluzioni.