SUPERFICI DI RIEMANN 2013-'14
ALCUNI ESERCIZI

FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI COMPLESSE.

1.1. Si consideri la funzione $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$, $f(z_1, z_2) = z_1^3 z_2 + z_1 z_2 + z_1^2 z_2^2 + z_2^2 + z_1 z_2^3$. Trovare una decomposizione $f = g_w h$ come nel Teorema di Preparazione di Weierstrass.

1.2. Trovare il polinomio di Weirstrass $g_w(z)$ della funzione $f(z, w) = \sin(w^2 - z^3)$.

1.3. Sia $\mathcal{O}_n$ l'anello dei germi in $0 \in \mathbf{C}_n$ delle funzioni olomorfe. È un dominio di integrità? Sia $\mathcal{A}_n$ l'anello dei germi in $0 \in \mathbf{R}^n$ delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$. È un dominio di integrità? È noetheriano?

1.4. Sia $U \subset \mathbf{C}^n$ un aperto e $f : U \to \mathbf{C}$ olomorfa. Dimostrare che $U - Z(f)$ è connesso e denso in U.

1.5. Sia $n \geq 2$. Sia $U \subset \mathbf{C}^n$ un aperto e $f : U - \mathbf{C}^{n-2} \to \mathbf{C}$ olomorfa. Mostrare che c'è una (unica) estensione olomorfa $\bar{f} : U \to \mathbf{C}$.

1.6. Sia $F : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$, $f(z, w) = (z, zw)$. È aperta? Confrontare con il caso di funzioni olomorfe da $\mathbf{C}$ a $\mathbf{C}$.

VARIETÁ COMPLESSE.

2.1. Quali sono le sottovarietà analitiche compatte di $\mathbf{C}^n$?

2.2. Quali dei seguenti gruppi sono gruppi di Lie complessi? (un gruppo di Lie complesso è un gruppo G che ha una struttura di varietà complessa tale che la composizione $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$, e l'inversione $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, sono morfismi di varietà complesse).
(a) $GL_n(\mathbf{C})$. (b) $SL_n(\mathbf{C})$ (matrici di determinante =1). (c) $O_n(\mathbf{C})$ (matrici ortogonali a coefficienti complessi). (d) $Sp_{2n}(\mathbf{C})$ (matrici simplettiche a coefficienti complessi). (e) $U_n(\mathbf{C})$ (matrici unitarie).

2.3. Si consideri un toro complesso $X_\Lambda = \mathbf{C}/\Lambda$ (dove $\Lambda = e_1\mathbf{Z} + e_2\mathbf{Z}$, con e_1, e_2 linearmente indipendenti su $\mathbf{R}$).
(a) Dimostrare che si può sempre trovare un reticolo della forma $\Lambda_\tau = 1\,\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}$, con $Im(\tau) > 0$, tale che X_Λ è biolomorfo a X_{Λ_τ}.
(b) Mostrare che X_{Λ_τ} e $X_{\Lambda_{\tau'}}$ (con $Im(\tau') > 0$) sono biolomorfi se e e solo se

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \textit{con} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$$

2.4. Sia $\Lambda_0 \subset \mathbf{C}^n$ il reticolo $1\,\mathbf{Z}^n + i\mathbf{Z}^n$ e sia $\Lambda \subset \mathbf{C}^n$ il reticolo $e_1\mathbf{Z} + \cdots + e_{2n}\mathbf{Z}$. Dimostrare che se $e_1, \ldots e_{2n}$ sono algebricamente indipendenti su $\mathbf{Q}$ (non esiste un polinomio $P \in \mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_{2n}]$ tale che $P(e_i) = 0$ per $i = 1, \ldots, 2n$) allora i tori complessi n dimensionali $X_{\Lambda_0} = \mathbf{C}^n/\Lambda_0$ e $X_\Lambda = \mathbf{C}^n/\Lambda$ non sono biolomorfi.

2.5. Sia $\lambda \in \mathbf{R}$, $0 < \lambda < 1$. Si consideri la seguente azione di $\mathbf{Z}$ su $\mathbf{C^n} - \{0\}$: $(k, \bar{z}) \mapsto \lambda^k \bar{z}$.
(a) Mostrare che $(\mathbf{C}^n - \{0\})/\mathbf{Z}$ ha una struttura naturale di varietà complessa.
(b) Mostrare che, per $n = 1$, la varietà complessa del punto precedente è biolomorfa ad un toro complesso $\mathbf{C}/\Lambda$ e determinare Λ esplicitamente.
(c) Mostrare che, in generale, la varietà del punto (a) è diffeomeorfa a $S^{2n-1} \times S^1$.

2.6. (a) Se $P = P(x_1, \ldots, x_n)$ è un polinomio omogeneo di grado d dimostrare la seguente identità: $\sum_{i=1}^{n} x_1(\partial P/\partial x_i) = dP$.

(b) Sia $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ la sottovarietà analitica definita dalle equazioni polinomiali omogenee $\begin{cases} P_1(z_1, \ldots, z_n) = 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ P_k(z_1, \ldots, z_n) = 0 \end{cases}$

$(k \leq n)$. Dimostrare che X è liscia di dimensione $n-k$ se e solo se $rk(\frac{\partial P_i}{\partial z_j}) \equiv k$.

2.7. Sia $G(k,n) = \{V \mid V$è un $\mathbf{C}$-sottospazio vettoriale di $\mathbf{C}^n$ e $\dim_{\mathbf{C}} V = k$ $\}$. Dimostrare che $G(k,n)$ ha una struttura naturale di varietà complessa di dimensione $k(n-k)$ (se $k=1$ o $k=n-1$ coincide con lo spazio proiettivo complesso).

2.8. Sia $\mathcal{T} \to \mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ is fibrato vettoriale olomorfo tautologico (si ricorda che $\mathcal{T} = \{(\bar{v}, [\bar{z}]) \in \mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{P}^n_{\mathbf{C}} \mid \bar{v} \in Span(\bar{z})\}$). Sia $\mathcal{E}$ l'$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}$- modulo localmente libero associato. Calcolare $\Gamma(X, \mathcal{E})$ (in pratica, le sezioni olomorfe di $\mathcal{T} \to \mathbf{P}^n$).

SUPERFICI DI RIEMANN

3.1. Per $P(z,w) \in \mathbf{C}[z,w]$ della forma $z^2 + b(w)z + c(w)$ dimostrare che il discriminante (= risultante di $P(z,w)$ e $\partial P(z,w)/\partial z$) è $d(w) = b(w)^2 - 4c(w)$, Per $P(z,w) = z^3 + b(w)z + c(w)$ dimostrare che $d(w) = 4b(w)^3 + 27c(w)^2$.

3.2. Determinare il genere delle superfici di Riemann associate alle seguenti curve algebriche in $\mathbf{C}^2$:
(a) $z^3 + zw^3 + w = 0$. (b) $z^2 - (w-a_1)\cdots(w-a_m) = 0$, con $a_i \neq a_j$. (c) $z^3 - w^6 + 1 = 0$. (d) $4z^3 - 3z^2w + w^3 - 2w = 0$. (e) $z^3 - 3z^2 + w^6 = 0$. (f) $z^m + w^m + 1 = 0$.

3.3. Dimostrare che, dati $2g+2$ punti su S^2, c'è una superficie di Riemann di genere g compatta munita di un rivestimento di grado due: $X \to S^2$ ramificato esattamente su quei punti, e che il rivestimento è unico a meno di isomorfismo.

FORME DIFFERENZIALI SU VARIETÀ DIFFERENZIABILI

4.1. Dimostrare che se una varietà con bordo X è orientabile allora anche ∂X lo è, e un'orientazione di X induce naturalmente un'orientazione di ∂X.

4.2. Dimostrare il Teorema di Stokes per $\mathbf{H}^n$ (semispazio $x_n \geq 0$ per ogni n.

4.3. Mostrare che l'usuale Teorema della Divergenza (detto anche di Gauss) per integrali su un dominio di R^3 è un caso particolare del nostro Teorema di Stokes. Generalizzare a domini di $\mathbf{R}^n$ il Teorema di Gauss (cioè dare tutte le definizioni necessarie, enunciare il teorema e mostrare che è un caso particolare del Teorema di Stokes)

4.4. Con metodi elementari (cioè senza il Teorema di De Rham) determinare $H^*_{DR}(X)$, dove
(a) X è una superficie liscia orientabile compatta di genere g,
(b) X è una superficie orientabile compatta di genere g con k buchi,
(c) $X = S^n$
(d) $X = \mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$
(e) $X = \mathbf{C}^2/\Lambda$ un toro complesso di dimensione due
(f) $X = \mathbf{C}^n/\Lambda$ un toro complesso di dimensione n

4.5. Per $r > 0$ sia $\omega_r = (1/r)\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}x^i\, dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_{n+1}$.
(a) Mostrare che ω_1 è chisa. Calcolare $\int_{S_n} w_1$ e concludere che w_1 non è esatta.
(b) Sia $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2$. Verificare che $dr\, \omega_r = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$. Concludere che ω_r è una forma di volume su $S_n(r)$ (sfera di raggio r).

4.6. Mostrare che $H^i_{DR}(S^n) = \mathbf{R}$ se $i = 0, n$ e 0 altrimenti.

.4.7 Sia X la regione di $\mathbf{R}^3$ definita da $1 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$. Mostrare che $H^1_{DR}(X) = 0$ e che $H^2_{DR}(X) \neq 0$. Concludere che X non è diffeomeorfa a una palla di $\mathbf{R}^3$.

4.8. Sia $F : X \to Y$un morfismo di varietà complesse. Mostrare che $F^*(\mathcal{A}^{p,q}_Y) \subset \mathcal{A}^{p,q}_X$.

FASCI E COOMOLOGIA

5.1. Sia A un anello commutativo. Dimostrare che un A-modulo libero è proiettivo.

5.2. Si consideri il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & \mathcal{F} & \to & E^\bullet \\ & & \downarrow^f & & \\ 0 & \to & \mathcal{G} & \to & I^\bullet \end{array}$$

dove $E^\bullet$ è una risoluzione qualsiasi e $I^\bullet$ è una risoluzione iniettiva. Siano $g^\bullet, h^\bullet E^\bullet \to I^\bullet$ due morfismi di complessi che estendono f. Mostrare che $f^\bullet$ e $g^\bullet$ sono omotopi. Estendere la proposizione al caso di risoluzioni proiettive.

5.3. (a) Sia $0 \to I \to A \to B \to 0$ una successione esatta corta, con I iniettivo. Dimostrare che la successione esatta è *spezzata*, cioè esiste un isomorfismo $f : A \to I \oplus B$ tale che il diagramma seguente è commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & I & \to & A & \to & B & \to 0 \\ & \downarrow^{id} & & \downarrow^f & & \downarrow^{id} & \\ 0 \to & I & \to & I \oplus B & \to & B & \to 0 \end{array}$$

(b) Estendere al caso proiettivo. Dimostrare che ogni A-modulo proiettivo P è sommando diretto di un A-modulo libero (cioè esistono due A-moduli C e D, con D libero, tali che $P \oplus C = D$).

5.4. Sia $U = \mathbf{C}^2 - (0,0)$. Sia $D(Z_i) = \{(z_1, z_2) \mid z_i \neq 0\}$. Si consideri il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = D(Z_1) \cup D(z_2)$. Mostrare che il gruppo di coomologia di Cech $H^{\vee,1}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_U)$ è un $\mathbf{C}$-spazio vettoriale di dimensione infinita.

5.5. Si consideri il ricoprimento standard $\mathcal{U}$ di $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$. Mostrare che $H^{\vee,1}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}) = 0$ e che $H^{\vee,1}(\mathcal{U}, \Omega^1_{\mathbf{P}^1}) \cong \mathbf{C}$.

5.6. Riempire i dettagli delle dimostrazioni (viste a lezione) delle seguenti proposizioni:
(a) se G è un gruppo abeliano divisibile allora G è iniettivo.
(b) la categoria dei gruppi abeliani ha abbastanza iniettivi;

(c) la categoria dei fasci in gruppi abeliani su un fissato spazio topologico ha abbastanza iniettivi.

TEOREMI DI DE RHAM E DOLBEAULT

6.1. Dimostrare che $H^k_{sing}(X.\mathbf{R}) \cong (H_{k,sing}(X,\mathbf{R}))^* \cong Hom_{\mathbf{Z}}(H_{k,sing}(X,\mathbf{Z}),\mathbf{R})$.

6.2. (1) Dimostrare che il teorema di De Rham fornisce isomorfismi FUNTORIALI $H^k(X,\mathbf{R}) \cong H^k_{DR}(X) \cong H^k_{sing}(X,\mathbf{R})$ al variare di X nella categoria delle varietà differenziabili .
(2) Dimostrare che di isomorfismi funtoriali come sopra ce n'è uno solo. (usare l'esercizio 5.2).

6.3. Consideriamo la coomologia singolare $H^k_{\infty,sing}$ fatta con i simplessi e le catene $\mathcal{C}^\infty$ (invece che continue).
(a) Imitare l'argomento già studiato in Topologia Algebrica per dimostrare che se U è una palla di $\mathbf{R}^n$ (o, più generalmente, un aperto contraibile) allora $H^k_{\infty,sing}(X,\mathbf{Z}) = 0$ per $k > 0$. (Aiutarsi con: Warner: Foundations of Differentiable....., Sez.5.31). Lo stesso vale rimpiazzando $\mathbf{Z}$ con $\mathbf{R}$.
(b) Dimostrare che $H^k_{sing}(X,\mathbf{Z}) \cong H^k_{\infty,sing}(X,\mathbf{Z})$ (dimostrare che anche il secondo spazio è isomorfo a $H^k(X,\mathbf{Z})$.

6.4. Adattare il teorema di Stokes ad un teorema che assicuri che il morfismo $\mathcal{A}^k(U) \to \mathcal{C}^k_{\infty,sing}(U,\mathbf{R})$ che associa ad una k-forma ω la mappa che associa ad una catena differenziabile in U l'integrale di ω sulla catena induce un morfismo di risoluzioni

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to & \mathbf{R} & \to & \mathcal{A}^\bullet_X \\ & \| & & \downarrow \\ 0 \to & \mathbf{R} & \to & \mathcal{C}^\bullet_{\infty,sing,X} \end{array}$$

6.5. Assumendo le conclusioni dei precedenti esercizi, enunciare e dimostrare la versione più precisa del Teorema di De Rham, cioè che l'isomorfismo $H^k_{DR}(X) \cong H^k_{sing}(X,\mathbf{R})$ è $\bar{\omega} \mapsto (\bar{C} \mapsto \int_C \omega)$.

TEOREMI DI HODGE E APPLICAZIONI

7.1. Sia V uno spazio vettoriale (reale) con un prodotto scalare (,). Dimostrare che $(v_{i_1} \wedge \cdots v_{i_k}, v_{i_1} \wedge \cdots v_{i_k}) := \det(a_{hk})$ dove $a_{hk} = \det(v_{i_h}, w_{j_h})$, esteso linearmente a tutto $\Lambda^k V$ definisce un prodotto scalare su $\Lambda^k V$. (2) Dimostrare la stessa cosa nel caso hermitiano.

7.2. Dimostrare che, dato un prodotto scalare su $T_x X$ e un'orientazione le seguenti definizioni dell'operatore $* : \Omega^k_{x,X} \to \Omega^{n-k}_{x,X}$ (a) hanno senso e (b) sono equivalenti:
(i) $(\phi,\tau)_x\, vol_x = \phi \wedge *\tau$;
(ii) $* = \Phi^{-1} \circ \rho$, dove $\rho : W \to W^*$ è l'isomorfismo indotto dal prodotto scalare e $\Phi : \Omega^i_{x,X} \to (\Omega^{n-i}_{X,x})^*$ è l'isomorfismo indotto dalla mappa bilineare $U : \Omega^i_{x,X} \times \Omega^{n-i}_{X,x} \to \mathbf{R}$ definita da $U(\alpha,\beta) = vol(\alpha \wedge \beta)$.
(iii) $*(1) = (-1)^u \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$, $*(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) = (-1)^u 1$, $*(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k) = (-1)^u \phi_{k+1} \wedge \cdots \wedge \phi_n$, dove $\{e_1,\ldots,e_n\}$ è una qualsiasi base ortonormale e $u = 2$ se $\{e_1,\ldots,e_n\}$ è orientata positivamente e $u = 1$ altrimenti.
Dimostrare anche che $*$ è un'isometria.

7.3. Dimostrare che, dato un fibrato vettoriale olomorfo E su una varietà complessa X, muniti entrambi di metrica hermitiana, l'operatore $\bar{\partial}^*_E : \mathcal{A}^{0,q}(E) \to \mathcal{A}^{0,q-1}(E)$ definito a lezione è effettivamente l'aggiunto di $\bar{\partial}_E$ (usare Stokes).

7.4. Dimostrare che, data una varietà complessa X e un fibrato vettoriale olomorfo E su X, muniti entrambi di metrica hermitiana, si ha la commutazione

$$(\Delta_{\bar\partial_{\Omega^n_X \otimes E^*}})\,(*_E) = (*_{\omega^n_X \otimes E^*})\,(\Delta_{\bar\partial_E})$$

7.5. Usando i due esercizi precedenti riempire i dettagli della dimostrazione del Teorema di Dualità di Serre.

7.6. Sia X una varietà complessa di dimensione reale $n = 2m$, munita di metrica hermitiana. In accordo con quanto detto a lezione, definiamo $* : \mathcal{A}_{\mathbf{C}} \to \mathcal{A}^{n-k}_{\mathbf{C}}$ come l'estensione lineare a $(\ ) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ dello $*$ definito nel caso reale.
(a)Mostrare che,su ogni punto x, $(\alpha, \beta)_x\, vol_x = \alpha \wedge \overline{*\beta}$ (dove $(\ ,\ )_x$ è l'estensione lineare hermitiana a $\Omega^1_{x,\mathbf{C}}$ del prodotto scalare su $\Omega^1_{x,\mathbf{R}}$
(b) Mostrare che $*(\mathcal{A}^{p,q}) \subset \mathcal{A}^{m-q,n-p}$;
(c) Mostrare che gli aggiunti di ∂ e $\bar\partial$ sono rispettivamente $\partial^* = - * \bar\partial *$ e $\bar\partial^* = - * \partial *$ (usare Stokes).